



DOMÍNIOS DE IDEAIS PRINCIPAIS, DOMÍNIOS DE FATORAÇÃO ÚNICA E DOMÍNIOS EUCLIDIANOS

Bruna Lovato de Carvalho (PIBIC/CNPq/Uem), Érica Zancanella Fornaroli (Orientadora), e-mail: ezancanella@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Matemática / Álgebra.

Palavras-chave: anel comutativo, anel de polinômios, domínio de integridade.

Resumo:

Este projeto iniciou-se com um estudo detalhado do conceito de anel comutativo e suas propriedades básicas, como homomorfismos, ideais e anéis quocientes. O conceito de anel de polinômios também foi estudado. Na sequência, foi dada ênfase ao estudo dos domínios de integridade, principalmente dos domínios de ideais principais, de fatoração única e euclidianos.

Introdução

Os anéis são considerados um dos principais objetos de estudo na área de Álgebra. O conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} com as operações de adição e multiplicação usuais é um exemplo conhecido de anel e possui propriedades muito boas do ponto de vista algébrico. Por exemplo, a operação de multiplicação é comutativa e o produto de dois elementos não nulos é um elemento não nulo. Essas duas propriedades caracterizam esse anel como um domínio de integridade. Alguns domínios de integridade possuem propriedades adicionais que os definem como domínios de ideais principais, domínios de fatoração única e domínios euclidianos. Foram estudados neste projeto cada um desses tipos de domínios de integridade.

Materiais e métodos

Foram realizados estudos individuais dos tópicos do programa utilizando os seguintes livros: Bhattacharya, Jain e Nagpaul (1994), Garcia e Lequain (2012) e Herstein (1975). Foram apresentados seminários semanais à



orientadora com o objetivo de expor os resultados obtidos e de esclarecer possíveis dúvidas.

Resultados e Discussão

Na primeira parte do projeto, os estudos se basearam no conceito de anel comutativo e em suas propriedades básicas. Um anel ou anel comutativo é um conjunto A com pelo menos dois elementos, munido de duas operações internas chamadas adição e multiplicação, que satisfazem algumas condições, sendo elas: as duas operações são associativas e comutativas, existe um elemento neutro com respeito à adição e existe um elemento neutro com respeito à multiplicação, todo elemento de A possui um inverso com respeito à adição e a multiplicação é distributiva relativamente à adição. Um anel D é chamado domínio ou domínio de integridade se produto de quaisquer dois elementos não nulos do anel é um elemento não nulo. Os conjuntos dos números inteiros Z e dos números reais R são exemplos de domínios de integridade com as operações de adição e multiplicação usuais. Também foi feito um estudo sobre homomorfismos de anéis, ideais, anéis quociente e anéis de polinômios sobre anéis comutativos. Os anéis de polinômios em uma indeterminada x com coeficientes inteiros $Z[x]$ ou reais $R[x]$ são também exemplos de domínios de integridade.

A partir desses estudos, o foco do trabalho foi estudar as definições, propriedades e exemplos de domínios euclidianos, domínios de ideais principais e domínios de fatoração única e as relações entre esses conceitos. Um domínio euclidiano é um domínio D com uma função f definida nos elementos não nulos de D com valores naturais que satisfaz as seguintes propriedades:

- Para quaisquer elementos não nulos a e b de D existem elementos t e r em D tais que

$$a=bt+r, \text{ com } r=0 \text{ ou } f(r)<f(b);$$

- $f(a) \leq f(ab)$, para quaisquer elementos não nulos a e b de D .

Um domínio cujos ideais são todos principais, isto é, gerados por um único elemento, é chamado de domínio de ideais principais. Um domínio D é um domínio de fatoração única se todo elemento não nulo e não invertível de D se escreve de maneira única como produto de elementos irredutíveis de D . Vimos que todo domínio euclidiano é um domínio de ideais principais e todo domínio de ideais principais é um domínio de fatoração única. As recíprocas não são verdadeiras. Por exemplo, $R[x]$ é um domínio euclidiano e $Z[x]$ é um domínio de fatoração única, mas não é um domínio de ideais principais.

Conclusões



O propósito deste projeto de Iniciação Científica foi o de realizar um estudo detalhado do conceito de alguns domínios de integridade, sendo eles, domínios de ideais principais, domínios de fatoração única e domínios euclidianos. Isto nos possibilitou o estudo de tópicos de Álgebra Abstrata que não são abordados no curso de Matemática e nos possibilitou também o desenvolvimento da linguagem escrita e da habilidade oral com a preparação e apresentação dos seminários.

Agradecimentos

Agradecemos à Universidade Estadual de Maringá, pela bolsa e pela oportunidade de conhecer e trabalhar em uma pesquisa científica e à orientadora deste projeto, pela atenção e paciência.

Referências

BHATTACHARYA, P. B., JAIN, S. K., NAGPAUL, S. R. **Basic Abstract Algebra**. 2nd. ed. Cambridge: University Press, 1994.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. 6. ed. São Paulo: IMPA, 2012.

HERSTEIN. I. N. **Topics in Algebra**. 2nd. ed. New York: John Wiley & Sons, 1975.