O TEOREMA DE BAIRE

Raul Alexandre Diniz (PIBIC/FA-UEM), Prof. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria (Orientadora); e-mail: jcofaria@uem.br

Universidade Estadual de Maringá/Departamento de Matemática

Ciências Exatas e da Terra- Matemática- Análise.

Palavras-chave: Análise, Espaços métricos, Teorema de Baire.

Resumo:

Este projeto tem como objetivo o estudo de alguns tópicos da Análise e da Topologia, com o objetivo de obter todas as condições para se demonstrar o Teorema de Baire. Foram estudados os conceitos de conjuntos, espaços métricos, espaços vetoriais, normas e sequências, bem como propriedades relacionadas a estes temas sob o ponto de vista da analise, não se esquecendo do rigor matemático. Como aplicação dos conceitos e das propriedades citadas, apresentaremos a demonstração do Teorema de Baire.

Introdução

A palavra topologia foi usada pela primeira vez por Johann Benedict Listing, em 1847, em um artigo onde Listing escreve sobre a faixa de Mobius e como ela pode descrever objetos equivalentes que surgem através de distorções. No entanto, a resolução do problema das sete pontes de Konigsberg, por Leonard Euler em 1736, é considerada como sendo um dos primeiros resultados topológicos. Já o conceito atual de espaço topológico foi sofrendo alterações na história, tornando-se mais geral que os primeiros conceitos dados. Maurice Frechet, um matemático francês, em seu trabalho de 1906, foi quem introduziu os espaços métricos na análise funcional.
Sabe-se que, desde os primórdios da Análise, é de fundamental importância conhecer a topologia dos espaços envolvidos nos estudo. Os espaços métricos representam uma classe particular dos chamados espaços topológicos. Os espaços topológicos são estruturas que permitem a formalização de conceitos como convergência, conexidade e continuidade e, além disso, esses espaços aparecem também em praticamente todos os ramos da matemática moderna.
Particularmente, observa-se que as primeiras concepções de continuidade e diferenciabilidade apresentadas nos cursos de Cálculo Diferencial e

Integral introduzem o acadêmico a questionamentos do tipo: “Qualquer fenômeno da natureza pode ser modelado por intermédio de uma função contínua?”, “Quais as relações entre continuidade e diferenciabilidade?”, “Toda função contínua é diferenciável, e vice-versa?”. As respostas a tais questões nem sempre podem ser obtidas de maneira satisfatória pelo acadêmico, tendo em vista que, para que as mesmas sejam respondidas com o rigor analítico necessário, é necessário o conhecimento de ferramentas sofisticadas e resultados da análise matemática que só são ministrados em estágios mais avançados dos cursos de graduação.

Desta forma, este projeto propõe a introdução das primeiras noções topológicas necessárias para a compreensão de resultados mais abrangentes da análise, culminando com o estudo do Teorema de Baire e algumas aplicações clássicas como, por exemplo, a existência de funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto.

Materiais e métodos

Este trabalho foi desenvolvido através de estudos individuais dos tópicos relacionados, e encontros semanais para apresentação de seminários. Como base para esses estudos utilizamos os textos Cavalcanti (1989), Domingues (1982) e Lima (1977).

Resultados e Discussão

Ao longo do desenvolvimento desse projeto foram estudados os conceitos de Conjuntos, Normas, Métricas, Espaços Métricos, Continuidade, Homeomorfismo, Limites, Sequências. Em especial, foram estudados os Espaços Métricos, com foco em suas propriedades e aplicações, expondo seus principais teoremas, buscando alcançar o principal resultado desta pesquisa, demonstrar o Teorema de Baire. Nesse sentido, foram estudados os conceitos de conjuntos magros, a definição de Espaços de Baire, para enfim demonstrar o Teorema de Baire propriamente dito, o qual, apesar de ser um resultado simples, é base para a obtenção de resultados importantes na Análise Funcional e na Topologia. É enunciado como segue:

Teorema: Todo espaço métrico completo, com a topologia induzida pela métrica, e todo espaço regular localmente compacto é um espaço de Baire.

Por fim, observamos que o estudo de funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto é importante não só por ser um problema clássico do Cálculo, mas também por estar conectado com vários outros ramos da matemática, como, por exemplo, na teoria de fractais e na teoria do caos. Utilizando o Teorema de Baire, Stefan Banach (1892 - 1945), matemático polonês e um dos fundadores da Análise Funcional, provou que existem mais funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum

ponto, no sentido de categoria de Baire, do que funções contínuas que são diferenciáveis.

Assim, o objetivo final do projeto é provar a existência de tais funções contínuas em todos os pontos, porém, não diferenciáveis em nenhum.

Conclusões

O objetivo deste projeto de Iniciação Científica foi o de realizar um estudo inicial e sistemático dos tópicos mais importantes com relação á Análise, com ênfase em demonstrar o Teorema de Baire, que desempenham um papel de suma importância no estudo da Análise e também em diversas outras áreas da matemática. Os resultados obtidos servirão de base para estudos avançados no contexto das funções contínuas, em um futuro próximo.

Agradecimentos

Agradeço a orientadora professora Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria, da qual sem o apoio, não seria possível a realização deste projeto. Agradeço também à minha família e amigos pelo apoio por todo esse tempo, em especial ao grupo PET-Matemática UEM. Agradeço a Fundação Araucária pelo apoio financeiro. Agradeço também a Universidade Estadual de Maringá pelo apoio e estrutura. Muito obrigado a todos.

Referências

CAVALCANTI, M. M. **Tópicos de Análise Matemática**. Maringá: Notas de Aula, 1989.

DOMINGUES, H. H. **Espaços Métricos e Introdução á Topologia**. São Paulo: Atual Editora, Editora da Universidade de São Paulo, 1982.

LIMA, E. L. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq 1977.