INICIAÇÃO À ARITMÉTICA

Rodrigo Yamasaki (PIBIC/CNPq-FA-UEM), Patricia Hernandes Baptistelli (Orientadora), e-mail: phbaptistelli@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas, PR.

Área e subárea do conhecimento: Matemática/Teoria dos Números.

Palavras-chave: números inteiros, Princípio de Indução, divisibilidade.

Resumo:

Neste projeto, nos limitamos à parte elementar da teoria dos números, abordando as propriedades básicas dos números inteiros tais como a relação de divisibilidade, a representação numérica através dos sistemas de numeração, congruências e a construção dos números racionais. Para isso, estudamos o Princípio de Indução Completa, o algoritmo da divisão e suas aplicações.

Introdução

A aritmética é a parte elementar da teoria dos números e se tornou um dos principais pilares da Matemática. A teoria dos números é tradicionalmente reservada ao estudo dos números inteiros, presentes até hoje em diversas situações do cotidiano como, por exemplo, para medir temperaturas, identificar saldos bancários, desacelerações de corpos, etc. Tal estudo é feito a partir das propriedades usuais da adição e multiplicação de inteiros, da relação $<$ e do Princípio da Boa Ordem. Um dos mais importantes resultados na teoria dos números é o Teorema Fundamental da Aritmética, segundo o qual todo inteiro diferente de 0, 1 e -1 pode ser escrito de modo único como um produto de fatores primos.

Neste projeto, buscamos estudar as propriedades dos números inteiros por meio de uma abordagem axiomática, ou seja, a partir de uma lista de axiomas e das operações de adição e de multiplicação. Uma das principais ferramentas em nosso estudo é o Princípio de Indução e suas variações. Também estudamos a relação de divisibilidade entre dois números inteiros por meio do algoritmo da divisão e exploramos os conceitos de máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, números primos e números racionais. As duas principais referências no desenvolvimento do trabalho foram (HEFEZ, 2011) e (MILES e COELHO, 2001).

Materiais e métodos

Por se tratar de um projeto de pesquisa básica, a metodologia empregada consiste de pesquisas bibliográficas, estudo do material coletado, apresentação de seminários e discussão do tema abordado.

Resultados e Discussão

Como já mencionamos, um dos principais resultados em teoria dos números é o Teorema Fundamental da Aritmética. Abaixo, apresentamos os principais conceitos e resultados referentes a ele. Em toda parte, denotamos por Z o conjunto dos números inteiros.

Definição 1. Sejam $a,b \in Z$. Dizemos que b divide a ou que b é divisor de a se existe $c \in Z$ tal que $bc=a$.

Definição 2. Um inteiro c é um divisor comum de a e b se c divide a e c divide b. Chama-se máximo divisor comum de a e b, denotado por mdc(a,b), o maior de seus divisores comuns.

Definição 3. Um inteiro p diz-se primo se tem exatamente dois divisores positivos: 1 e $|p|$.

Note que a definição acima exclui propositalmente o 0, que tem infinitos divisores positivos, e os inteiros 1 e -1, que têm um divisor positivo. Um número diferente de 0, 1 e -1 que não é primo diz-se composto.

Proposição 4. Sejam p um número primo e $a, b \in Z$.
(i) Se p não divide a, então mdc(p,a)=1;
(ii) Se p divide ab, então p divide a ou p divide b.

Corolário 5. Se um número primo p divide um produto $a_1a_2 \ldots a_n$, então p divide a_k, para algum $1 \leq k \leq n$.

Teorema 6. Seja p um inteiro diferente de 0, 1 e -1. Então p é primo se, e somente se, toda vez que p divide um produto de dois números, p divide pelo menos um dos fatores.

Lema 7. Todo inteiro $a > 1$ pode ser escrito como produto de números primos.

Teorema 8. Seja $a > 1$ um inteiro. Existem primos positivos $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_t$ tais que $a=p_1p_2 \ldots p_t$ e essa decomposição é única.

Agrupando primos eventualmente repetidos na decomposição de a, podemos enunciar o teorema anterior de forma levemente diferente, como segue:

Teorema 9. (Teorema Fundamental da Aritmética). Seja a um inteiro diferente de 0, 1 e -1. Então existem primos positvos $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ e inteiros positivos $n_1, n_2, \ldots, n_r$ tais que

$$a = E\, p_1^{n1} \ldots p_r^{nr},$$

onde E é 1 ou -1, conforme a seja positivo ou negativo. Além disso, essa decomposição é única.

Corolário 10. Sejam a e d inteiros diferentes de 0,1 e -1. Então, existem primos positivos $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ e inteiros não negativos $n_1, n_2, \ldots, n_r, m_1, m_2, \ldots, m_r$ (mas eventualmente iguais a zero, se necessário) tais que

$$a = E_1\, p_1^{n1} \ldots p_r^{nr} \qquad \text{e} \qquad d = E_2\, p_1^{m1} \ldots p_r^{mr},$$

em que E_1 e E_2 são iguais a 1 ou -1.

Conclusões

O Teorema Fundamental da Aritmética é uma ferramenta eficaz na teoria dos números. Por meio dele podemos estabelecer critérios de divisibilidade para os números inteiros e responder a outras questões da teoria, como determinar o número de divisores de um inteiro dado e calcular a soma de tais divisores. O Teorema Fundamental da Aritmética também destaca a importância dos números primos na teoria dos números.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, minha família e minha orientadora.

Referências

HEFEZ, A., **Elementos de Aritmética**, 2ª Edição, Série Textos Universitários, Rio de Janeiro, SBM, 2011.

MILES, C. P. e COELHO, S. P., **Números - Uma introdução à Matemática**, São Paulo, Edusp, 2001.

23 a 25 de setembro de 2015
24° Encontro Anual de iniciação Científica
4° Encontro Anual de iniciação Científica Júnior
XXIV EAIC
IV EAIC JR