CAMPO DE VETORES E O ÍNDICE DE POINCARÉ-HOPF

Kamila Segatelli Marin (PIC/Uem), Maria Elenice Rodrigues Hernandes (Orientadora), e-mail: merhernandes@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Área: Matemática
Subárea: Geometria e Topologia

Palavras-chave: Campo de Vetores, Índice de Poincaré-Hopf, Variedades Diferenciáveis.

Resumo

O conceito de campos de vetores está presente em diversas áreas do conhecimento. Nesse sentido, inúmeros fenômenos físicos e naturais são estudados através de campos vetoriais, por exemplo, na biologia temos o campo presa-predador que tem por finalidade estudar o controle biológico de pragas em canaviais, na física associamos um campo de vetores ao movimento de partículas de um fluido, à corrente elétrica que passa através de um fio etc. Além disso, podemos representar velocidades dos ventos e das correntes oceânicas por campos de velocidades. Em estudos meteorológicos campos de vetores justificam a dificuldade em fazer previsões precisas do tempo. Em matemática estudos como estes são desenvolvidos na Teoria das Singularidades, em Equações Diferenciais, em Topologia entre outras. Neste trabalho temos por objetivo definir o Índice de Poincaré-Hopf de uma singularidade isolada de um campo de vetores contínuo sobre uma variedade diferenciável e apresentar suas principais propriedades.

Introdução

De acordo com Dalbelo (2011), foi por volta de 1885 que Henri Poincaré associou a cada singularidade isolada de um campo vetorial contínuo sobre uma superfície compacta e sem bordo, um número, chamado de índice da singularidade. Além disso, provou um importante teorema, o qual garante que todo campo vetorial contínuo sobre a esfera S^2 admite pelo menos uma singularidade. Mais ainda, provou que a soma dos índices das singularidades de um campo contínuo V tangente à uma superfície compacta e sem bordo, não depende do campo V, e esta soma de índices é um número conhecido como característica de Euler da superfície.

No entanto, foi Heinz Hopf quem provou o mesmo resultado para objetos mais gerais que as superfícies compactas, ou seja, as variedades m-dimensionais compactas e sem bordo e assim, o resultado ficou conhecido como Teorema de Poincaré Hopf.
Neste trabalho apresentaremos alguns conceitos relevantes desse estudo, que serão pré-requisitos para definir o Índice de Poincaré-Hopf, além de algumas propriedades deste índice.

Materiais e métodos

Para desenvolvermos o presente trabalho foram realizadas pesquisas bibliográficas, estudos e discussões com a finalidade de compreender e transmitir com clareza os conhecimentos adquiridos.

Resultados e Discussão

De modo geral, nosso intuito é definir o *Índice de Poincaré-Hopf*. Para isso, é importante entendermos alguns conceitos, tais como campos vetoriais, variedades diferenciáveis, singularidades, grau de uma aplicação dentre outros, pois o índice em questão será definido como o grau local de uma aplicação.
Campos vetoriais em R^n são aplicações que associam a cada ponto de um aberto deste espaço um vetor neste espaço. No entanto, demos ênfase à campos de vetores definidos sobre objetos mais gerais no espaço Euclideano R^n, denominados, variedades de dimensão n, que são uma generalização do conceito de superfícies em R^3. Intuitivamente, entendemos as variedades como objetos que localmente são homeomorfos a R^n. Neste trabalho, estudamos variedades diferenciáveis e, portanto, ao invés de homeomorfismos é necessário considerarmos difeomorfismos.
A cada ponto p de uma variedade diferenciável M associamos um espaço, conhecido como espaço tangente à variedade M em p, e denotamos este por T_pM. Nesse contexto, T_pM possui uma estrutura de espaço vetorial de mesma dimensão que M. Além disso, a união de todos os espaços vetoriais tangentes a M em p é o chamado fibrado tangente de M que denotamos por TM.
Deste modo um campo de vetores V sobre uma variedade diferenciável M é definido como uma correspondência $V : M \rightarrow TM$ que associa cada ponto p de M um ponto (p,V_p) do fibrado tangente, onde V_p é um vetor no espaço tangente a p em M.
Dada uma aplicação diferenciável própria $f: M \rightarrow N$, onde M e N são variedades diferenciáveis m e n dimensionais respectivamente, a noção de grau de f é um conceito essencial, e de maneira geral, corresponde ao número de pré-imagens de f em um valor regular p de N. Destacamos que p

é um valor regular quando o conjunto de pontos da pré-imagem considerada é composto apenas por pontos regulares, isto é, aqueles onde a diferencial de f é sobrejetora. No entanto, o grau local de uma aplicação contínua $f:U\setminus\{a\}\to R^n\setminus\{b\}$, onde U é um aberto de R^n, é definido, na obra de Lima (1961), como o grau de uma extensão de f à esfera unitária S^{n-1} de R^n.
Considerando então, um campo de vetores V sobre uma variedade M, é fundamental a ideia de singularidade. Dizemos que p em M é uma singularidade do campo se V(p)=0. Nessas condições, se existe uma vizinhança de M tal que p é a única singularidade de V, dizemos que p é uma singularidade isolada de V.
A seguir construiremos uma função f com o objetivo definir o índice de Poincaré-Hopf de um campo vetorial contínuo V sobre uma variedade diferenciável m-dimensional M com p uma singularidade isolada de V.
Considere uma aplicação contínua $f: U\to R^m$ definida num aberto U de R^m dada por $f(u)=(\alpha_1(u),\ldots, \alpha_m(u))$, onde $\alpha_i : U\to R$ são as coordenadas do campo vetorial V na base do espaço tangente.

Definição: Sejam V um campo vetorial contínuo sobre uma variedade diferenciável m-dimensional M, orientada, p em M uma singularidade isolada de V e $\varphi: V^*\to U$ uma carta de M, onde V* é uma vizinhança de p e U é um aberto de R^m. Consideremos $a = \varphi(p)$ em U e $f:U\setminus\{a\} \to R^m\setminus\{0\}$ a aplicação definida acima. O *Índice de Poincaré-Hopf* de V em p é o grau local de f em a. Denotamos este índice como $Ind_{PH}(V,p)$.

Uma questão importante é que provamos que o índice de Poincaré-Hopf de V em p não depende da carta φ. E no caso de singularidades ditas simples, temos o seguinte resultado.

Teorema: Sejam M uma variedade diferenciável orientada, $V:M \to TM$ um campo vetorial diferenciável e p em M uma singularidade simples de V em p, então $Ind_{PH}(V,p).=+1$ ou $Ind_{PH}(V,p).=-1$.

Neste trabalho apresentamos ainda vários exemplos e resultados sobre o índice de Poincaré-Hopf, que é uma ferramenta importante em diversas áreas do conhecimento. Na verdade, o conceito de índice de um campo de vetores (em particular, o índice de Poincaré-Hopf) aparece em diversos estudos de variedades, sob o ponto de vista da Topologia, de Sistemas Dinâmicos, na Teoria de Folheações, entre outras. Em especial destacamos um dos mais conhecidos e importantes resultados de Topologia conhecido como Teorema de Poincaré-Hopf, que afirma: “Sejam M uma variedade diferenciável compacta e orientada e V um campo vetorial contínuo sobre M, com um número finito de singularidades. A característica de Euler-Poincaré de M é dada pela soma dos índices de Poincaré-Hopf de cada

singularidade." Que é um belíssimo resultado de topologia por relacionar objetos de naturezas distintas, isto é, a característica de Euler-Poincaré, que é um invariante topológico com o índice de um campo vetorial, que é um invariante diferencial.

Conclusões

Neste projeto de Iniciação Científica fizemos um estudo detalhado acerca de campos vetoriais sobre variedades diferenciáveis, grau e grau local de uma aplicação, apresentando diversos exemplos e demonstrações de seus principais resultados. Esta bagagem nos permitiu definir o índice de Poincaré-Hopf de uma singularidade de um campo de vetores, que como vimos é um conceito importante em diversas áreas da Matemática.

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora pelo auxílio e paciência durante todo tempo dos meus estudos.

Referências

DALBELO, T.M. **O índice de Poincaré-Hopf e generalizações no caso singular**. 2011. 143f. Dissertação (Mestrado)-Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMS USP), Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

LIMA, E.L. **Introdução à Topologia Diferencial**. Notas de Matemática nº23. IMPA, Rio de Janeiro,1961.