
# GRUPOS SOLÚVEIS FINITOS

Marcela Pauka Santana (PIBIC/CNPq/Uem), Laerte Bemm (Orientador),
e-mail: mahpauka@gmail.com

Universidade Estadual de Maringá/Centro de Ciências Exatas e da Terra/
Maringá, PR.

**Área: Matemática.**

**Subárea: Álgebra.**

**Palavras-chave:** Grupos; séries de composição; grupos solúveis.

**Resumo:**

Queremos apresentar um resultado devido a P. Hall que dá condições para a existência de subgrupos em grupos solúveis. Tal resultado generaliza os Teoremas de Sylow para grupos solúveis e é uma recíproca fraca do Teorema de Lagrange para grupos finitos.

## Introdução

Um antigo problema em Matemática consistia em determinar uma fórmula para as raízes de polinômios que envolvesse apenas as quatro operações básicas e a radiciação. Tais fórmulas eram conhecidas para polinômios de graus 2 desde os tempos dos babilônios e para polinômios de graus 3 e 4 tais fórmulas existem desde o século XV e são devidas a del Ferro, Tartaglia, Cardano e Ferrari. Por isso, diz-se que tais polinômios são *solúveis por radicais.* No primeiro terço do século XIX, Abel demonstrou que nem todo polinômio de grau 5 é solúvel por radicais. Por fim, Galois caracterizou os polinômios solúveis por radicais através da solubilidade do que hoje chamamos de *Grupo de Galois*, definido como o grupo de permutações das raízes do polinômio. Galois provou que um polinômio é solúvel por radicais se e somente se o grupo de Galois a ele associado é solúvel. A teoria desenvolvida por Galois não serviu apenas para enriquecer o estudo de polinômios, mas também contribui com uma nova ideia: os grupos solúveis.
Apresentaremos a seguir as principais definições e resultados que são necessários para a compreensão do Teorema de Hall.


## Materiais e métodos

Foram realizadas pesquisas bibliográficas, estudo e discussão teórica do tema abordado.

## Resultados e Discussão

Apresentamos abaixo os principais resultados estudados sobre os quais falaremos na apresentação. Maiores detalhes podem ser encontrados em (ROTMAN, 1994) e (BHATTACHARYA; JAIN; NAGPAUL, 1994).

*Definição 01:* Um conjunto não vazio $G$ munido com uma operação binária interna $\cdot$ é dito ser um *grupo* se tal operação for associativa, admite elemento neutro e todo elemento de $G$ admite um inverso. Quando tal operação for também comutativa, diremos que o grupo é *abeliano.*

A cardinalidade de $G$ é denotada por $|G|$ e chamada *ordem de $G$.*

*Definição 02:* Um subconjunto não vazio $H$ de um grupo $G$ é dito ser um *subgrupo* de $G$, se $H$ com a operação do grupo for um grupo. Equivalentemente, $H$ será um subgrupo se e somente se $H$ for fechado para a operação do grupo e todo elemento de $H$ admitir um inverso. Neste caso escrevemos $H \leq G$.

Todo grupo possui pelo menos dois subgrupos: o grupo todo e o conjunto formado pelo elemento neutro. Tais subgrupos são chamados *triviais*.

Dado um subgrupo $H$ de um grupo $G$ e $g$ um elemento de $G$, definimos a *classe lateral a esquerda* de $H$ determinada por $g$ como sendo o conjunto $gH := \{g \cdot h\,;\, h \in H\}$. Analogamente, definimos a *classe lateral a direita* de $H$ determinada por $g$.

O conjunto de todas as classes laterais a esquerda de $H$ em $G$ é denotado por $G/_H$. Sua cardinalidade é chamada *índice de $H$ em $G$* e denotado por $[G:H]$.


*Teorema 03* (*Teorema de Lagrange*). Se $G$ é um grupo finito e $H$ é um subgrupo de $G$, então a ordem de $H$ divide a ordem de $G$. Mais precisamente, $|G| = [G:H]|H|$.

A recíproca de Teorema de Lagrange não é verdadeira. Porém, alguns resultados nos fornecem recíprocas "fracas". Os Teoremas de Sylow (que não apresentamos aqui) são um exemplo disso. O Teorema de Hall, apresentado adiante é outro exemplo.

Seja *N* um subgrupo de um grupo $G$ e $g$ um elemento de $G$. Note que não há motivo para termos $gN = Ng$. Porém, quando isso vale para todo elemento $g$ do grupo $G$, diremos que $N$ é um *subgrupo normal* de $G$ e escrevemos $N \lhd G$. Neste caso, o conjunto ${}^{G}/_{N}$ é um grupo com a operação dada por: $aN \cdot bN := (a \cdot b)N$, para quaisquer $a, b \in G$. Tal grupo é chamado grupo quociente de $G$ por $N$.

*Definição 04:* Uma *série normal* de um grupo $G$ é uma sequência de subgrupos $\{e\} = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_n = G$ tal que cada $G_i$ é normal em $G_{i+1}$. Os grupos quocientes ${}^{G_i}/_{G_{i-1}}$ são chamados *fatores*, $1 \leq i \leq n$.

*Definição 05:* Uma *série de composição* de um grupo $G$ é uma série normal sem repetições, $\{e\} = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_n = G$ cujos fatores ${}^{G_i}/_{G_{i-1}}$, chamados *fatores de composição*, são grupos simples, $1 \leq i \leq n$.

*Proposição 06:* Todo grupo finito possui uma série de composição.

*Definição 07:* Um grupo $G$ é dito ser *solúvel* se $G$ tem uma série de composição cujos fatores são grupos abelianos.

Proposição 08: Todo grupo finito e todo grupo abeliano é solúvel.

*Teorema 08* (*Teorema de Hall*): Seja $G$ um grupo solúvel finito de ordem $nm$, tais que $n$ e $m$ são primos entre si. Então $G$ tem um subgrupo de ordem $n$. Mais ainda, se $H$ e $K$ são dois subgrupos de ordem $n$, então existe um elemento g em G tal que $H = g^{-1}Kg$.

**Conclusões**

No projeto de iniciação científica estudamos toda a Teoria de Grupos necessária para entendermos o Teorema de Hall.


## Agradecimentos

Agradeço a Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

## Referências

ROTMAN, J. J.: **An Introduction to the Theory of Groups**, 4ª Ed., New York: Springer – Verlag, 1994.

BHATTACHARYA, P. B., JAIN, S. K., NAGPAUL, S. R.: **Basic Abstract Algebra**, 2ª Ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1994.