MENSURABILIDADE DE CONJUNTOS E FUNÇÕES

Mariana Aparecida Caniatto (PIBIC/FA), Rodrigo Martins (Orientador), e-mail: rmartins@uem.br; Claudete Webler Martins (Co-orientadora), e-mail: cmwebler@uem.br

Universidade Estadual de Maringá/Centro de Ciências Exatas e da Terra/ Maringá, PR.

Área/ **Subárea:** Matemática/ Análise.

Palavras-chave: δ -anel, espaço de medida, função mensurável.

Resumo:

Apresentamos, de maneira simples e resumida, alguns dos conceitos fundamentais da teoria da medida e da integração de Lebesgue.

Introdução

Inicialmente, abordamos as definições de δ-anel, função de conjunto e função aditiva, espaço de medida, função mensurável, função simples, função característica e integral. Por fim, mostramos que toda função integrável gera uma função de conjunto enumeravelmente aditiva.

Materiais e métodos

Foram realizadas pesquisas bibliográficas, estudo e discussão teórica sobre o tema abordado.

Resultados e Discussão

Apresentamos abaixo os principais resultados estudados sobre os quais falaremos na apresentação e podem ser encontrados em (ROYDEN, 1971) e (RUDIN, 1987).

Definição 01: Uma família R de conjuntos constitui um anel se, para quaisquer A, B $\in$ R, tivermos:

i) $A \cup B \in R$;
ii) $A - B \in R$.

Um anel R é um δ - anel se a união enumerável de conjuntos em R pertence a R.

Exemplo 01: Dizemos que E é um conjunto de Borel se E puder ser obtido, a partir dos conjuntos abertos, por uma família enumerável de operações, consistindo cada uma delas em reunião, interseção ou passagem ao complemento. A coleção de todos os conjuntos de Borel é um δ – anel.

Definição 02: i) Dizemos que F é uma função de conjunto definida no δ - anel R se F associa a cada A ϵ R, um número F(A), do conjunto dos números reais ampliado ($\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ou $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$).
ii) F é chamada aditiva se para quaisquer A, B ϵ R com $A \cap B=\phi$, tivermos $F(A \cup B) = F(A) + F(B)$.
iii) Dizemos que F é enumeravelmente aditiva em R se F aplicada a reunião enumerável de conjuntos (dois a dois disjuntos) de R resultar no somatório de F aplicada a cada conjunto contido nesta reunião (ou seja, se para qualquer coleção enumerável $\{A_i\}$ de R com $A_i \cap A_j= \phi$ se $i \neq j$, $F(\cup A_i)= \sum F(A_i)$).

Definição 03: Seja X um conjunto, não necessariamente subconjunto de um espaço euclidiano ou mesmo de qualquer espaço métrico. Diz-se que X é um espaço de medida se existe um δ-anel M de subconjuntos de X (chamados conjuntos mensuráveis) e uma função de conjunto, não negativa, enumeravelmente aditiva μ (chamada medida) definida em M. Se X pertence a M, dizemos que X é um espaço mensurável.

Definição 04: Seja f uma função definida no espaço mensurável X, com valores no conjunto dos números reais ampliado. Tem-se que a função f é mensurável se o conjunto $\{x \,\epsilon\, X;\ f(x) > a\}$ é mensurável para todo a real.
Seja s uma função real definida em X. Se o conjunto Imagem de s é finito, dizemos que s é uma função simples.

Exemplo 01: Seja $E \subset X$ e $K_E(x) =1$ se $x \,\epsilon\, E$, $K_E(x) =0$ se $x \notin E$. A função K_E é chamada função característica de E. Temos que K_E é mensurável se, e somente se, E é um conjunto mensurável.
Se $\{c_1,c_2,...,c_n\}$ é o conjunto Imagem de s, definimos os conjuntos $E_i= \{x;\ s(x)= c_i\}$. Assim a função simples $s(x) =\sum c_i K_{E_i}(x)$ é mensurável se, e somente se, cada E_i é mensurável.

Definição 05: Seja X um espaço mensurável, M um δ-anel dos conjuntos mensuráveis, e μ uma medida. Suponha que $s(x) =\sum c_i K_{E_i}(x)$ (onde $x \,\epsilon\, X$, $c_i>0$ e $i=1,2,...n$) é mensurável e que E ϵ M. Definimos $I_E(s)=\sum c_i\, \mu(E \cap E_i)$.

Definição 06: Se f é mensurável e não negativa, definimos $\int_E f\, d\mu = \sup I_E(s)$, em que o supremo é relativo a todas as funções s tais que $0 \leq s \leq f$. O primeiro membro desta igualdade é chamado de integral de Lebesgue de f, relativamente a medida μ, sobre o conjunto E.

Observação: Deve-se notar que a integral pode assumir o valor $+\infty$.

Teorema 01: Suponha que f é uma função mensurável e não negativa em X. Para $A \in M$, defina $g(A) = \int_A f\, d\mu$. Então, g é enumeravelmente aditiva em M.

Corolário: Se f for uma função qualquer tal que $\int_X f\, d\mu$ é finita, então $h(A) = \int_A f\, d\mu$ será uma função enumeravelmente aditiva em M.

Conclusões

O objetivo do projeto de iniciação científica era estudar os conceitos fundamentais da teoria da medida e da integração de Lebesgue. Tal objetivo foi alcançado através dos conceitos e resultados estudados ao longo do trabalho.

Agradecimentos

Agradeço à Fundação Araucária, de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Estado do Paraná, pelo apoio financeiro.

Referências

ROYDEN, H. L. **Real Analysis.** 2. ed. New York: The Macmillan Company, 1971.

RUDIN, W. **Real and complex analysis.** 3. ed. NewYork: McGraw-hill Book company, 1987.