TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO DE RIESZ E APLICAÇÕES

Matheus Henrique do Prado Zaniboni e Marcelo Augusto Bento (PIBIC/CNPq/Uem), Marcelo Moreira Cavalcanti (Orientador), e-mail: mmcavalcanti@uem.br, Claudete Matilde Webler Martins (Co-Orientadora), e-mail: cmwebler@uem.br

Universidade Estadual de Maringá/Centro de Ciências Exatas e da Terra/ Maringá, PR.

Área/ **Subárea:** Matemática/ Análise.

Palavras-chave: operadores lineares, espaço de Hilbert, produto interno.

Resumo:

Queremos apresentar uma demonstração para o Teorema de Representação de Riesz em espaços de Hilbert.

Introdução

Para compreender o Teorema de Representação de Riesz e a sua demonstração, apresentaremos primeiramente algumas definições e resultados envolvendo operadores lineares limitados, produto interno, espaço de Hilbert e seu espaço dual. Para concluir, apresentaremos a demonstração do Teorema de Representação de Riesz.

Materiais e métodos

Foram realizadas pesquisas bibliográficas, estudo e discussão teórica do tema abordado.

Resultados e Discussão

Apresentamos abaixo os principais resultados estudados sobre os quais falaremos na apresentação, que podem ser encontrados em (BRÉZIS, 1983), (KREYSZIG, 1989) ou (CAVALCANTI, 2011).

Definição 01: Um operador linear de um espaço vetorial X para um espaço vetorial Y, definidos sobre o corpo K (corpo dos números reais ou complexos), é uma aplicação $T : X \rightarrow Y$ tal que $T(x+\alpha y) = T(x) + \alpha T(y)$, para quaisquer $x, y \in X$ e para todo $\alpha \in K$.

Definição 02: Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T: X \rightarrow Y$ um operador linear. T é chamado de operador linear limitado se existe alguma constante positiva $M>0$ tal que, para todo $x \in X$, $||Tx||\_Y\leq M\ ||x||\_X$.

Definição 03: Seja X um espaço vetorial real. Um produto interno é uma aplicação $<,>: X\times X \rightarrow R$, tal que, para quaisquer $x, y, z \in X$ e $\alpha \in R$:
(P1) $< x+y,z > =< x,z > + < y,z >$
(P2) $< \beta x,y > = \beta< x,y >$;
(P3) $< x,y > = \ < y,x >$;
(P4) $< x,x > \geq 0$ e $<x,x > = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Como consequência desta definição temos que a função $|,| : X \rightarrow R$ definida por $| x |\^2 = < x,x >$ é uma norma derivada do produto interno e, portanto, todo espaço que possua um produto interno por ser visto como um espaço normado, da definição anterior. É obvio que existem normas que não são derivadas de um produto interno, aqui representados por notações distintas ($|,|$ e $||,||\_X$).

Definição 04: Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H, munido de um produto interno e completo em relação à norma definida por esse produto interno. O espaço dual de H, é o espaço dos operadores lineares limitados $f : H \rightarrow R$. Denotamos o espaço dual de H por H'.

Conclusões

Como consequência destes resultados temos o Teorema de Representação de Riesz, o qual, apenas, enunciaremos aqui.

Teorema 01: (de Representação de Riesz em espaços de Hilbert) Todo funcional linear limitado f num espaço de Hilbert H pode ser representado em termos de um produto interno. Mais precisamente, existe $z \in H$ tal que $f(x) = < x,z >$, para todo $x \in H$, onde z depende de f, é unicamente determinado por f e tem norma $|z|= ||f||\_H'$.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Referências

CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N., KOMORNIK, V. **Introdução à Análise Funcional.** Maringá: Eduem, 2011.

KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. New York: Wiley, 1989.

BRÉZIS, H. **Analyse Functionnelle:** Théorie et applications. Paris: Masson, 1983.