CAMPOS DE VETORES EM SUPERFÍCIES

Carolina Paz Barateiro Vignoto (PIBIC/CNPq-UEM), Josiney Alves de Souza (Orientador), e-mail: jasouza3@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá/Departamento de Matemática.

Ciências Exatas e da Terra – Matemática.

Palavras-chave: curvas, superfícies, campos de vetores.

Resumo:

O presente projeto teve como objetivo o estudo sobre campos de vetores em espaços euclidianos e não euclidianos. A meta principal é desenvolver a maneira formal de definir e estudar campos de vetores sobre superfícies, introduzindo a teoria global de campos de vetores sobre variedades.

Introdução

O objetivo central desse projeto foi fazer uma introdução à teoria de campos de vetores sobre variedades diferenciais por meio de um estudo de campos de vetores sobre superfícies. Foram estudados os conceitos de diferenciabilidade no $\mathbb{R}^n$, formas diferenciais, campos de vetores e fluxo de campos de vetores. Introduzimos também a maneira formal de definir e estudar campos de vetores e fluxo sobre variedades, aplicando isso no caso de superfícies. Para uma visualização imediata foi considerado os casos bi e tridimensionais. A motivação principal para a execução desse projeto são as aplicações de campos de vetores em áreas de estudo na Física. Pelo menos em termos de terminologia, o conceito de campo de vetores tem raízes em exemplos físicos como campo gravitacional, campo eletrostático, campo de velocidades de um fluido, etc.

Materiais e métodos

Os materiais utilizados foram os livros (CARMO, 2006; LIMA, 2006). O método de estudo adotado foi o estudo individual dos tópicos do programa, com apresentações semanais de seminários ao orientador a fim de expor os resultados obtidos e esclarecer possíveis dúvidas, assim o orientador pode indicar os possíveis problemas e os novos tópicos a serem estudados. No final do projeto foi apresentado um relatório técnico com os resultados

alcançados. O orientando também apresentará em encontros de iniciação científica os resultados obtidos durante a realização do projeto.

Resultados e Discussão

Inicialmente estudamos os conceitos básicos de continuidade e de diferenciabilidade no $\mathbb{R}^n$. Avançamos com o estudo sobre curvas, onde podemos denominar subconjuntos de R^3, que em certo sentido são unidimensionais e podem ser aplicados os métodos do calculo diferencial. Estudamos as curvas diferenciáveis parametrizadas, juntamente, vimos curvas regulares e o comprimento de arco. Desenvolvemos a teoria local das curvas parametrizadas pelo comprimento de arco. Dentro deste estudo, vimos o Triedo de Frenet, com o qual obtemos as principais caracterizações de curvas. Depois disso iniciamos o estudo de superfícies regulares. Estas são definidas como um subconjunto S do R^3 tal que, para cada ponto em S, existe uma vizinhança V desse ponto em R^3 e uma aplicação X de um conjunto aberto de R^2 sobre a intersecção de V com S que esta contida em R^3, de tal maneira a satisfazer três condições: (1) X ser diferenciável; (2) X é um homeomorfismo; (3) Condição de regularidade. A partir desse conceito, estudamos os conceitos de mudança de parâmetros e funções diferenciáveis sobre superfícies. Definimos mudança de parâmetro da seguinte forma: tome um ponto de uma superfície regular S e duas parametrizações de S, X levando um subconjunto U de R^2 a S e Y levando um subconjunto V de R^2 em S, sendo que o ponto considerado estará na intersecção de X(U) e Y(V). Esta intersecção gera a região W. A mudança de coordenadas é então dada pela composição da inversa de X com Y, sendo essa aplicação um difeomorfismo. Como dito, vimos os conceitos de funções diferenciáveis, mostramos que, ao estender as definições de diferenciabilidade a superfícies, a noção natural de equivalência associada à diferenciabilidade é a noção de difeomorfismo. Duas superfícies regulares S1 e S2 são difeomorfas se existir uma aplicação diferenciavel que leve S1 à S2 e que tenha uma inversa diferenciável. Estudamos também os conceitos locais das aplicações das funções diferenciáveis sobre superfícies. Durante os estudos destes conceitos vimos exemplos de algumas superfícies regulares para as quais podíamos aplicar as propriedades de superfícies estudadas. Logo em seguida estudamos plano tangente e diferencial de uma aplicação. Neste tópico, vimos que a condição de regularidade garante que o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de S, passando por um ponto p, constitui um plano. Então temos que o plano $dx_q(R^2)$, que passa por x(q)= p é chamado de plano tangente e é denotado por T_pS. Com esta noção de plano tangente vimos os conceitos de diferencial de uma aplicação (diferenciável) entre superfícies. Chegamos então à parte final e mais importante do projeto. Estudamos os conceitos de campo de vetores. Um

campo de vetores em um conjunto aberto U contido em R^2 é uma aplicação que associa a cada ponto q pertencente a U um vetor w(q) pertencente a R^2. O campo de vetores w é diferenciavel se, escrevendo q=(x,y) e w(q)=(a(x,y),b(x,y)), as funções a e b são diferenciaveis em U. Definimos a trajetória deste campo, uma curva parametrizada diferenciavel C(t)=(x(t),y(t)) tal que C'(t)=w(C(t)). Estudamos os principais teoremas envolvendo as caracterizações de campos de vetores, até que chegamos a definição de que um campo de vetores w em um conjunto aberto U contido em S de uma superfícies regular S é a correspondência que associa a cada ponto p pertencente a U um vetor w(p) pertencente ao plano TpS. O campo de vetores w é diferenciavel em p se, para alguma parametrização X(u,v) em p, as funções a(u,v) e b(u,v) dadas por w(p)=a(u,v)Xu + b(u,v)Xv são funções diferenciaveis em p. Após isso vimos alguns exemplos importantes e finalizamos o nosso estudo sobre campos de vetores proposto no projeto.

Conclusões

Os resultados desse projeto mostraram a maneira formal de se definir campos de vetores em espaços não-euclidianos, desde que exista uma estrutura diferenciável adequada para isso. O estudo dos tópicos de diferenciabilidade, curvas, superfícies, campos de vetores e fluxo sobre variedades realizados neste trabalho nos permite prosseguir com os avanços nos estudos, e assim aplicar esses conceitos no desenvolvimento de ferramentas para o estudo de problemas na Física.

Agradecimentos

Agradecemos a UEM e ao CNPq pelo apoio financeiro concedido.

Referências

CARMO, M. P., **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Textos Universitários. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
LIMA, E. L., **Curso de análise** vol. 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.