GRUPOS, AÇÕES E REPRESENTAÇÕES

Roger Emanuel Moraes Pezzott (PIC/Uem), Ednei Aparecido Santulo Junior (Orientador), e-mail: thisisdjunior@gmail.com

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências /Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra / Matemática

Palavras-chave: grupos, ações de grupos, grupo simétrico.

Resumo:

Esse trabalho baseou-se no estudo de grupos e representações de grupos voltados mais especificamente ao estudo do grupo simétrico e de suas representações irredutíveis.

Introdução

A noção de grupo de permutações apareceu na segunda metade do século XVIII em estudos de Lagrange sobre soluções de equações algébricas, que foi o campo de estudos sobre o qual essa noção foi explorada até a metade do século XIX. Em 1854, Cayley foi o primeiro a introduzir o conceito de grupo abstrato, como generalização dos grupos de permutações, tal como temos hoje. Desde então, os grupos foram alvo de estudos devido às suas aplicações a praticamente todas as áreas da Matemática. As ações de um grupo sobre um conjunto também tiveram papel fundamental para o desenvolvimento das diversas áreas da Matemática, especialmente na álgebra e na geometria.

Materiais e métodos

Para realização deste trabalho foram realizadas pesquisas bibliográficas, estudos e discussões com a finalidade de compreender e transmitir com clareza os conhecimentos adquiridos. As principal fonte de estudo foi Garcia e Lequain (2003) e notas de aula de um curso de representações de grupo voltado para o curso de pós-graduação em Matemática.

Resultados e Discussão

Um grupo é um par (G, *) que compreende um conjunto G e uma operação binária interna * de G que é associativa, possui elemento neutro e tal que todo elemento de G é simetrizável. Usualmente denota-se o grupo (G,*) simplesmente por G. Seja X um conjunto não vazio. O grupo simétrico de X é formado pelo conjunto de todas as bijeções de X em si mesmo munido da operação de composição usual de funções. Esse grupo é denotado por S_X. No caso particular em que X é finito e possui n elementos esse grupo é equivalente (isomorfo) a S_Y, sendo Y o conjunto formado por todos os inteiros positivos menores do que n ou iguais a n. Tal grupo é comumente denotado por S_n e seus elementos são chamados permutações. Um elemento f de S_n é uma transposição se f somente não fixa dois inteiros. Uma propriedade importante de S_n é que todo elemento deste grupo pode ser escrito como composição de transposições e, apesar da maneira de se fazer isso não ser única, a paridade do número de transposições envolvidas na maneira de se fazer isso é única, o que permite definir naturalmente permutações pares e ímpares. Um ciclo é uma permutação para a qual é possível encontrar um subconjunto $\{x_1,...,x_k\}$ de $\{1,...,n\}$ de modo que $f(x_1)=x_2$, $f(x_2)=x_3$, ... , $f(x_k)=x_1$ e os demais elementos são fixos. Toda permutação de S_n pode ser decomposta de maneira única, a menos da ordem dos fatores, como composição de ciclos disjuntos, o que permite associar cada permutação a uma t-upla $(m_1,...,m_t)$ de inteiros positivos tais que $m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_k$ e $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$. Essa t-upla é chamada tipo cíclico da permutação e possui a propriedade importante de caracterizar as classes de conjugação de S_n.
Uma ação de um grupo G sobre um conjunto X é uma aplicação $f: G \times X \to X$, tal que $f(gh,x)=f(g,f(h,x))$ e $f(1,x)=x$, para quaisquer g,h em G e qualquer x em X (aqui 1 denota o elemento neutro do grupo). No caso em que X é um espaço vetorial, a ação em questão é linear se ainda satisfaz $f(g,u+\alpha v)=f(g,u)+\alpha f(g,v)$ para qualquer g em G, quaisquer u, v em X e qualquer α no corpo de escalares de X. A partir de uma ação linear de G sobre um espaço vetorial V, podemos associar uma representação de G em V, que nada mais é que um homomorfismo de G no grupo dos operadores lineares invertíveis de V. O espaço vetorial V em questão é dito ser um G-módulo nesse caso. Um G-módulo é irredutível se não possui G-submódulos próprios e se o corpo de escalares de um G-módulo é o corpo complexo, o mesmo sempre admite decomposição única, a menos de isomorfismo, na soma direta de G-submódulos irredutíveis (Teorema de Maschke). Os G-módulos irredutíveis sobre o corpo complexo são em número finito (a menos de isomorfismo) se o grupo G é finito e mais, seu número é igual ao número de classes de conjugação do grupo G. Módulos unidimensionais são naturalmente irredutíveis e é fácil checar que os únicos S_n-módulos

unidimensionais são os módulos trivial e sinal. Finalmente apresentamos a construção de todos os S_n-módulos irredutíveis como submódulos apropriados dos módulos de Specht.

Conclusões

As representações de grupo constituem um caso particular das ações de grupo, mas que apresentam um comportamento bom (por exemplo todo G-módulo complexo é completamente redutível). Em geral, o problema de descrever todos os G-módulos irredutíveis de um grupo G é uma tarefa árdua, no entanto isso pode ser realizado para $G = S_n$.

Agradecimentos

Ao meu orientador, ao CNPq e ao PET.

Referências

GARCIA, A., LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. 2. ed.Rio de Janeiro: IMPA, 2003. 326 p.