UM ESTUDO ANALÍTICO DE UM MÉTODO DE PENALIDADE EXTERNA

Ana Flávia Vieira Bacon (PIBIC/CNPq/Uem), Emerson Vitor Castelani (Orientador), e-mail: evcastelani@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Matemática/ Matemática Aplicada

Palavras-chave: otimização, penalidade, restrições de desigualdade

Resumo:

No presente trabalho apresentamos um método de otimização não linear para resolver problemas de minimizar funções com restrições definidas por igualdades. São analisados pontos positivos e negativos deste tipo de abordagem.

Introdução

Diversas aplicações que envolvem uma tomada de decisão, controle de produção, previsão, alocação e ajustes podem ser modeladas em termos de um problema de otimização. A natureza destas aplicações podem estar relacionadas à diversas áreas: economia, engenharia de produção, engenharia química, física, estatística, ciência da computação entre outras. Dessa forma, o estudo de métodos capazes de resolver problemas de otimização é relevante.
De forma geral, um problema de programação não linear (otimização) é representado da seguinte maneira:

$$\begin{gathered} min f(x) \\ s.a.\, x \in \Omega \end{gathered}$$

onde $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
As características de f e Ω, definem problemas diferentes de otimização. Por exemplo:
(1) Se f é uma função não linear e $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b\}$, temos um problema de programação não linear com restrições lineares;
(2) Se f é uma função não linear e $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; a \leqslant x \leqslant b\}$, temos um problema de programação não linear com restrições de caixa;
(3) Se f é uma função não linear e $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; g(x) \leqslant 0\}$, onde $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, temos um problema de programação não linear com restrições de desigualdade não linear.

Os métodos de otimização são construídos de acordo com a estrutura definida pelo problema. Neste sentido, o objetivo do presente trabalho é apresentar um método cujo objetivo é resolver problemas de otimização com a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &s.a.\, h(x) = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

onde $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ são funções contínuas com derivadas contínuas até ordem 2 e, possivelmente, não lineares. O método que será abordado segue as ideias dos métodos do tipo penalidade externa. Será contemplado neste trabalho, além da exposição do método, um estudo analítico sobre os pontos positivos e negativos desta estratégia. Os resultados que serão apresentados aqui seguem a abordagem dada em (MARTÍNEZ; SANTOS, 1995).

Revisão de Literatura

Os métodos mais comuns na literatura de otimização são os métodos para resolver problemas irrestritos, i.e., problemas em que $\Omega = \mathbb{R}^n$. Tais problemas possuem condições de otimalidade simples que motivam a criação de métodos eficientes para resolver o problema de otimização associado, recomenda-se (FRIEDLANDER, 1994; LUENBERGER, 1984; MARTÍNEZ; SANTOS, 1995; NOCEDAL; WRIGHT, 1999) para uma leitura detalhada. Dentre os métodos que são utilizados para o citado fim, destacamos o método de Newton, Newton Modificado e o método BFGS (FRIEDLANDER, 1994; MARTÍNEZ; SANTOS, 1995).

Embora comuns, os métodos utilizados para resolver um problema na forma de (1) podem requerer mais sofisticação. Existem, na literatura, diversas abordagens para tratar deste problema, como métodos de região de confiança, restauração inexata, barreiras entre outros. Destaca-se, neste trabalho, o método de penalidade externa. A ideia deste método é simples e consiste em gerar, a cada iteração, um problema irrestrito associado ao problema original. A solução do problema associado pode não ser a priori, a solução do problema (1), tampouco factível. Mas se o iterando obtido for factível ao problema (1), então este também será uma solução.

O problema associado em questão é obtido pela inserção de uma função de penalização externa.

Definição: Uma função $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, é uma função de penalização externa se P é contínua em $\mathbb{R}^n$ e vale

$$\begin{aligned} &P(x) = 0, se\ h(x) = 0 \\ &P(x) > 0, se\ h(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, dado um parâmetro $\rho > 0$, podemos considerar o seguinte problema;

$$min\ f(x) + \rho P(x). \tag{2}$$

Note que o problema (2) é um problema irrestrito, logo pode-se utilizar, por exemplo, o método de Newton para resolvê-lo. Observe, ainda, que quanto maior é o valor do parâmetro ρ mais castigada será a solução do problema (2) em relação à infactibilidade do problema (1). Um algoritmo pode ser formalizado.

Algoritmo 1: Dados $\rho_1, x_0 \in \mathbb{R}^n, k = 1$

passo 1: Calcular $x_k \in \mathbb{R}^n$ como solução de $min\ f(x) + \rho_k P(x)$.

passo 2: Escolher $\rho_{k+1} > \rho_k, k := k+1$, e voltar ao passo 1.

Várias escolhas podem ser feitas para a função P. A escolha que será adotada neste trabalho é feita preservando a diferenciabilidade da restrição no problema (1), a saber, $P(x) = \frac{1}{2}\|h(x)\|_2^2$.

Relacionado ao algoritmo apresentado, temos os seguintes resultados, cuja demonstração é dada em (MARTÍNEZ; SANTOS, 1995).

Lema 1. Se $\bar{x}$ é um minimizador global do problema (1), então, para $k = 0,1,\ldots$ temos

$$f(x_k) \leqslant \varphi(x_k, \rho_k) \leqslant f(\bar{x}),$$

onde $\varphi(x,\rho) = f(x) + \rho P(x)$. Como consequência, $h(x_k) = 0$ se, e somente se, é uma solução global de (1).

Teorema 1. Seja $\{x_k\}$ a sequência de minimizadores globais de (1), gerada pelo Algoritmo 1 com $\rho_k \to \infty$. Então, todo ponto limite de $\{x_k\}$ é minimizador global do problema (1).

A priori, o resultado apresentado independe da função de penalização que se utiliza. Contudo, se $P(x) = \frac{1}{2}\|h(x)\|_2^2$ algumas propriedades extras podem ser exploradas.

Teorema 2. Considerando as mesmas hipóteses do teorema anterior, definindo $\lambda_k = \rho_k h(x_k)$ e supondo $x_k \to \bar{x}$, com $\bar{x}$ minimizador global e ponto regular, tem-se que $\lambda_k \to \bar{\lambda}$, onde $\bar{\lambda}$ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange associado a $\bar{x}$.

Resultados e Discussão

Os resultados obtidos neste trabalho contemplam dois aspectos do método apresentado: um numérico e um analítico. Considerando o aspecto numérico, foi feita uma implementação do algoritmo apresentado, onde os subproblemas foram resolvidos utilizando o método de Newton modificado (esta implementação pode ser encontrada em sites.google.com/site/emersonvitorcastelani). Considerando o aspecto analítico, tem-se algumas relações que expressam instabilidade numérica. De fato, fixado ρ tem-se que:

$$\nabla\varphi(x) = \nabla f(x) + \rho h'(x)^T h(x)$$

e

$$\nabla^2\varphi(x) = \nabla^2 f(x) + \rho[h'(x)^T h'(x) + \sum_{i=1}^{m} h_i(x)\nabla^2 h_i(x)].$$

Utilizando o teorema 2, tem-se para ρ suficientemente grande:

$$\nabla^2\varphi(x) \approx \nabla^2 f(x) + [\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}\nabla^2 h_i(x)] + \rho[h'(x)^T h'(x)].$$

Assim, observando que o termo dominante $\rho[h'(x)^T h'(x)]$ tem posto deficiente, temos que a hessiana $\nabla^2\varphi(x)$ fica mal condicionada, tornando o método instável numericamente.

Conclusões

O método que foi abordado neste trabalho tem grande apelo geométrico e fácil implementação. Estes são os dois pontos positivos do procedimento. Contudo, como foi verificado, o método gera subproblemas mal condicionados à medida que o parâmetro ρ cresce, o que representa uma dificuldade prática a ser considerada. A dificuldade apresentada aqui pode ser contornada analisando o sistema não linear que define as condições de otimalidade dos subproblemas. Tal análise resulta em métodos mais sofisticados denominados de métodos de Lagrangiano Aumentado (MARTÍNEZ; SANTOS, 1995).

Agradecimentos

Ao programa UEM/PIBIC pelo financiamento do projeto de pesquisa e ao meu orientador Prof° Dr. Emerson Vitor Castelani pela oportunidade e apoio na elaboração deste trabalho.

Referências

FRIEDLANDER, A. **Elementos de programação não linear**. 1ª. ed. Campinas: UNICAMP, 1994.

LUENBERGER, D. G. **Linear and Nonlinear Programming**. 2ª. ed. San Francisco (EUA): Addison Wesley, 1984.

MARTÍNEZ, J. M., SANTOS, S. A. **Métodos computacionais de otimização**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1995.

NOCEDAL, J., WRIGHT S. J. **Numerical Optimization**. 1ª. ed. New York: Springer- Verlag, 1999.