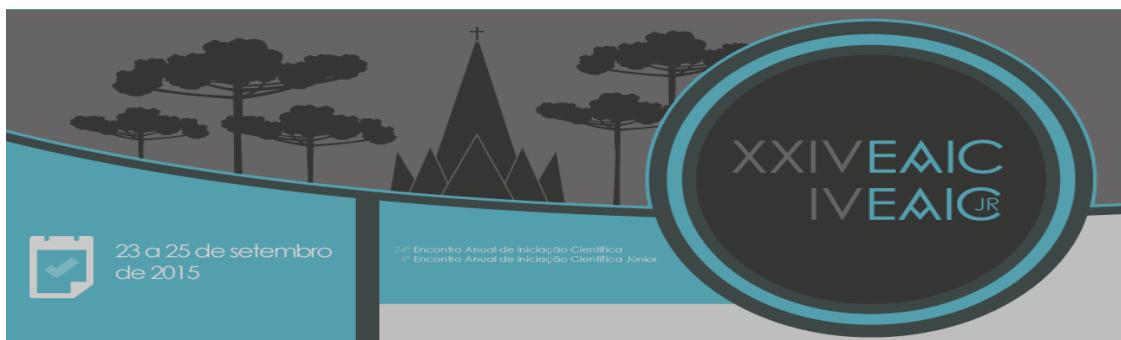




INTRODUÇÃO À TEORIA DE SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES

Valquiria Mendes de Lima (PIBIC/CNPq/Uem), Juan Amadeo Soriano Palomino (Orientador), e-mail: jaspalomino@uem.br

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas /Maringá, PR.

Área: Matemática e subárea: Análise

Palavras-chave: Semigrupos, Solução de uma EDP, Operadores lineares

Resumo:

O principal objetivo deste trabalho é apresentar a teoria de Semigrupos de Operadores Lineares para analisar a existência de solução de equações diferenciais parciais.

Introdução

A teoria de Semigrupos de Operadores Lineares pode ser utilizada para resolver uma grande classe de problemas comumente conhecidas como equações de evolução. Estes tipos de equações aparecem em muitas disciplinas, incluindo a física, química, biologia, engenharia e economia. Eles são geralmente descrito por um Problema de Valor inicial (PVI) para uma equação diferencial que pode ser ordinária ou parcial. No lugar de estudar o PVI diretamente, podemos estudar ele via a teoria de Semigrupos de Operadores Lineares. A teoria destes Semigrupos de Operadores Lineares será apresentada, juntamente com alguns exemplos, que tendem a surgir em muitas áreas de aplicação.

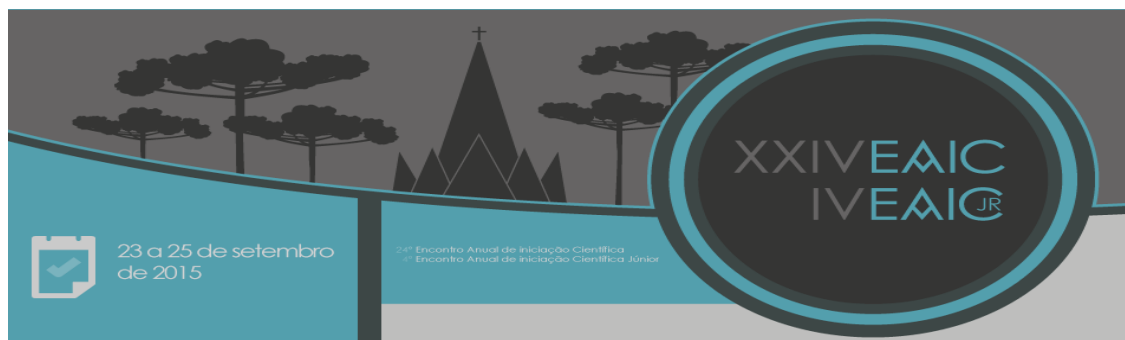
Materiais e métodos

Os materiais utilizados durante o estudo foram materiais bibliográficos relacionados com o trabalho em questão. A metodologia utilizada foi a realização de seminários semanais dos tópicos deste trabalho sob a supervisão do professor orientador.

Resultados e Discussão

O Problema Homogêneo

Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach, $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear de X e consideremos para cada $u_0 \in X$, o problema de Cauchy abstrato:



$$(1) \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t), t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Por solução de (1) entende-se toda função $u: \mathbb{R}^+ \rightarrow X$, contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável para $t > 0$, tal que $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ e que satisfaz (1). A segunda condição que figura em (1) será dita condição inicial do problema e u_0 o seu valor inicial.

Teorema 1: Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe C_0 , então, para cada $u_0 \in D(A)$, existe uma única função

$$u \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X),$$

Dita solução regular do problema de Cauchy dado em (1). Além disso, se S for um semigrupo de contrações temos que

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \text{ e } \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\| \forall t \geq 0.$$

Teorema 2: Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo S tal que $A \in G(1, w)$. Suponhamos que $u_0 \in D(A^k)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Então a solução do problema (1) verifica também a seguinte condição:

$$u \in C^{k-j}([0, \infty); D(A^j)) \text{ para } j = 0, 1, \dots, k.$$

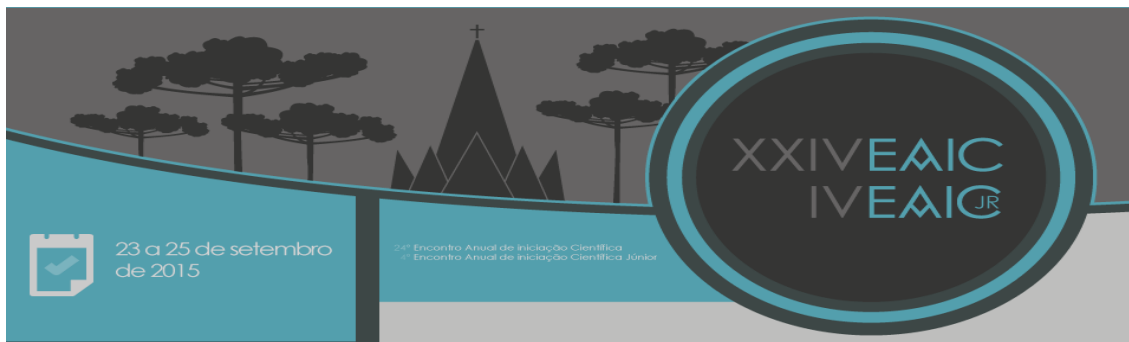
Teorema 3: Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo diferenciável de classe C_0 , então, para cada $u_0 \in X$ existe uma única função

$$u \in C^0((0, \infty); D(A)) \cap C^0([0, \infty); X) \cap C^1((0, +\infty); X)$$

$$\text{Que verifica } \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t); \text{ em } (0, +\infty) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Problema Não Homogêneo

Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo S classe C_0 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ uma função continua com valores em um espaço de Banach X e consideremos o problema de Cauchy abstrato



$$(3) \begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t), t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Definição 1: Uma função $u: \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ é chamada de solução forte se u for contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável para $t \geq 0$, $u(t) \in D(A)$ para todo $t \geq 0$ e u satisfazer o problema de Cauchy.

Teorema 1: O sistema (3) tem uma solução forte para todo $x \in D(A)$ se, e somente se, a função v dada por

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

For continuamente diferenciável para todo $t > 0$.

Teorema 2: Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe $\mathcal{C}_0$, $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ uma função contínua e suponhamos que f satisfaça uma das seguintes condições:

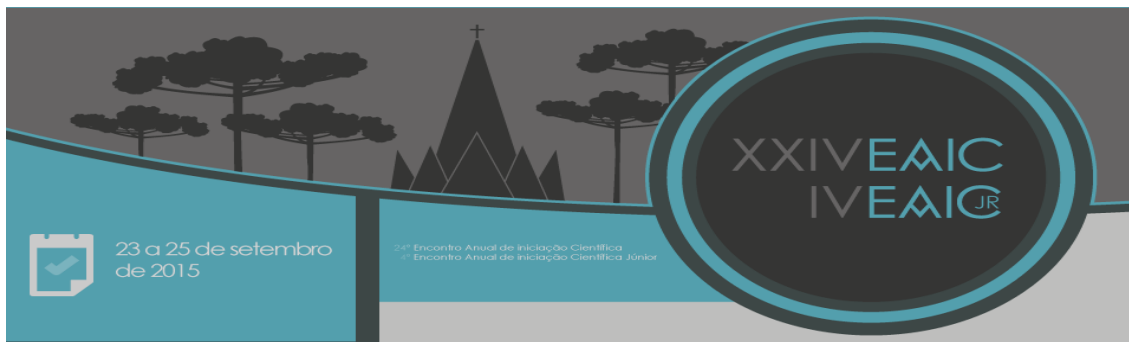
- i) f é continuamente diferenciável em todo $t \geq 0$;
- ii) $f(t) \in D(A)$ para todo $t \geq 0$ e Af é contínua. Então para todo $x \in D(A)$, o sistema (1) tem solução forte.

Definição 2: Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe $\mathcal{C}_0$. Uma função u a qual é diferenciável quase sempre sobre $[0, T]$ e tal que $u' \in L^1(0, T; X)$ é dita solução forte do problema de valor inicial (3) se $u(0) = u_0$ e $u'(t) = Au(t) + f(t)$ quase sempre sobre $[0, T]$.

Corolário 1: Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe $\mathcal{C}_0$. Se f é diferenciável quase sempre em $[0, T]$ e $f' \in L^1(0, T; X)$ então, para todo $u_0 \in D(A)$ o problema (3) possui uma única solução forte em $[0, T]$.

Definição 3: Diz-se que uma função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ é contínua no sentido Hölder para $t \geq 0$ se $\|f(t) - f(s)\| \leq L(t-s)^k$, $0 \leq s \leq t$. Onde L e k são constantes com $0 \leq k \leq 1$. Quando $k = 1$ dizemos que f é Lipschitz contínua.

Corolário 2: Seja X um espaço de Banach reflexivo e consideremos A o gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe $\mathcal{C}_0$ sobre X . Se f é Lipschitz contínua sobre $[0, T]$ então para todo $u_0 \in D(A)$ o problema de valor inicial (3) possui uma única solução forte u sobre $[0, T]$ dada por



$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

A teoria de semigrupos de operadores lineares foi baseada em: (PAZY, 1983).

Exemplos específicos sobre existência de soluções de equações diferenciais parciais utilizando a teoria de semigrupos podem ser encontrados nas seguintes referências: (PAZY, 1983, GOMES, 1999 e BREZIS, 2011).

Conclusões

Atualmente, a teoria de semigrupo é caracterizada por suas aplicações múltiplas, não só para as áreas tradicionais, tais como equações diferenciais parciais ou processos estocásticos. As técnicas associadas à teoria de semigrupos tornaram-se ferramentas importantes para a resolução de equações integro-diferenciais e equações diferenciais funcionais, em mecânica quântica ou na teoria de controle de dimensão infinita. Os métodos de semigrupos também são aplicados com grande sucesso para equações concretas decorrentes, por exemplo, na dinâmica populacional ou teoria de transporte.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CNPq pela bolsa de iniciação científica da aluna Valquiria Mendes de Lima.

Referências

BREZIS, H. **Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**, Rio de Janeiro: Springer, 2011. 109 p.

GOMES, A.M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução**, 2.ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 1999. 164 p.

PAZY, A., **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**, New York: Springer-Verlag, 1983.