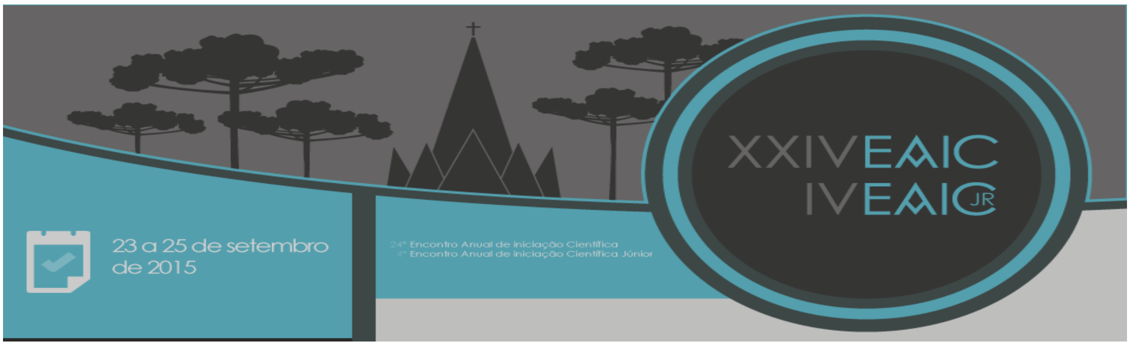


MÉTODOS DE PONTOS INTERIORES EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Daiany Padovani de Araujo(PIBIC/CNPq/Uem), Wesley Vagner Inês Shirabayashi (Orientador), Emerson Vitor Castelani (Co-orientador), e-mail: wvishirabayashi@uem.br

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Matemática/Matemática Aplicada

Palavras-chave: otimização, pontos interiores, convergência

Resumo:

Neste trabalho apresentamos conceitos básicos de otimização e um método de pontos interiores aplicado a problemas de minimização.

Introdução

Os problemas de otimização tem grande importância no mundo atual, por exemplo, empresas sempre querem maximizar seus lucros ou reduzir seus custos, e nesse sentido a pesquisa se faz necessária para que sempre tenhamos métodos mais eficientes para resolver tais problemas, (NOCEDAL; WRIGHT, 1999). Os métodos de pontos interiores mostraram-se bastante promissores a partir do final da década de 1980, quando foram desenvolvidos os métodos Primais-Duais e o método Preditor-Corretor de Mehrotra, para otimização linear, (ROOS; TERLAKY; VIAL, 2005), (WRIGHT, 1997). A partir dai os métodos de pontos interiores tem tido uma grande relevância na área de otimização.

Revisão de literatura

O problema geral de otimização consiste em:

$$\begin{array}{c} \text{Minimizar } f(x) \\ \text{sujeita a } x \in S, \end{array} \tag{1}$$

onde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $S \subset \mathbb{R}^n$ é chamado conjunto factível.

Nosso objetivo é resolver o problema definido anteriormente. Conforme Friedlander (1994), consideramos dois tipos de soluções para este problema:

Definição 1: Um ponto $x^* \in S$ é um minimizador local de f em S se, e somente se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in S$ tal que $\|x - x^*\| < \varepsilon$. Se $f(x) > f(x^*)$ para todo $x \in S$ tal que $x \neq x^*$ e $\|x - x^*\| < \varepsilon$, diremos que se trata de um minimizador local estrito em S.

Definição 2: Um ponto $x^* \in S$ é um minimizador global de f em S, e somente se $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in S$. Se $f(x) > f(x^*)$ para todo $x \in S$ tal que $x \neq x^*$, diremos que se trata de um minimizador global estrito.
A partir de agora vamos especificar o conjunto S por meio de funções e desigualdades, obtendo o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeita a } g(x) \leq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

onde $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, com f e g diferenciáveis.

Definição 3: Dizemos que $x \in S$ é um ponto regular se, e somente se o conjunto de vetores $\{\nabla g_1(x), \nabla g_2(x), \ldots, \nabla g_p(x)\}$ é linearmente independente.
Sob a condição de regularidade tem-se o seguinte resultado para minimizadores:

Condições Necessárias de Primeira Ordem:
Seja $x^* \in S$ um minimizador de (2) regular. Então, existem únicos $\mu_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, p$, tais que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0,$$
$$\mu_i g_i(x^*) = 0.$$

A busca por minimizadores de (2) passa pela obtenção de pontos que satisfaçam as condições necessárias de primeira ordem. Essas condições, juntamente com as restrições do problema formam as chamadas condições KKT (Karush-Khun-Tucker) para um problema de otimização, ver (FRIEDLANDER, 1994), (LUENBERGER; YE, 2008) e (NOCEDAL; WRIGHT, 1999). Então, para obter soluções do problema (2) devemos obter soluções das seguintes equações:

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \nabla g_i(x) = 0,$$
$$g(x) + z = 0,$$
$$\mu_i z_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, p.$$
$$\mu_i, z_i \geq 0, i = 1, \ldots, p.$$

Tais equações podem ser vistas como um sistema não linear nas variáveis (x, μ, z) com restrições de não negatividade em μ e z:

$$F(x, \mu, z) = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \nabla g_i(x) \\ g(x) + z \\ Z\mu \end{bmatrix} = 0, \qquad (3)$$

onde $Z = \operatorname{diag}(z)$.

Definição 4: Um ponto $w = (x, \mu, z)$ é chamado interior para (3) se $\mu, z > 0$.

Nos métodos de pontos interiores obtêm-se uma sequência de pontos que satisfazem a Definição 4 e que converge para uma solução do Problema (3).

Resultados e Discussão

Apresentamos, a seguir, um modelo de algoritmo de pontos interiores baseado no método de Newton, ver (NOCEDAL; WRIGHT, 1999):

Algoritmo 5: Seja $w_0 = (x_0, \mu_0, z_0)$, com $\mu_0, z_0 > 0$, uma aproximação inicial.
Para $k = 1,2,3, \ldots$ faça:
Passo 1: Calcule d solução de $J_F(w_k)d = -F(w_k)$.
Passo 2: Obtenha um α tal que $w_k + \alpha d$ satisfaça $\mu_k, z_k > 0$.
Passo 3: Faça $w_{k+1} = w_k + \alpha d$.

No Passo 1, $J_F(w_k)$ é o jacobiano da função F calculado no ponto w_k.

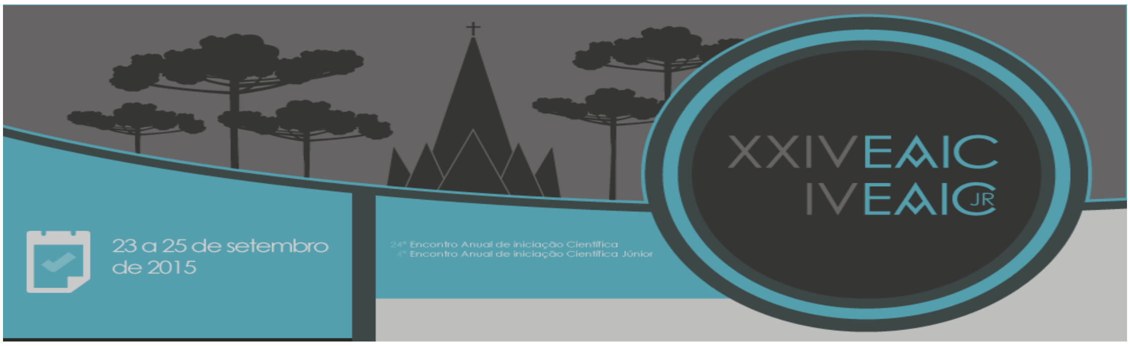
Se existir uma solução $w_* = (x_*, \mu_*, z_*)$ de (3) com $J_F(w_*)$ inversível, e se w_0 esta suficientemente próximo desta solução, então a sequência gerada pelo Algoritmo 5 converge para w_*.

Conclusões

Com os estudos realizados podemos concluir que os métodos de pontos interiores são uma alternativa válida e compatível com métodos tradicionais na resolução de problemas de otimização.

Agradecimentos

Agradecimentos à UEM pelo financiamento da bolsa de iniciação científica.



Referências

FRIEDLANDER, A. **Elementos de programação não linear** .1. Ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 1994.

LUENBERGER, D. G., YE, Y. **Linear and Nonlinear Programming**. 3. Ed. New York: Springer, 2008.

NOCEDAL, J., WRIGHT S. J. **Numerical Optimization**. 1. Ed. New York: Springer, 1999.

ROOS, C., TERLAKY, T., VIAL, J. P. **Interior Point Methods for Linear Optimization.** New York: Springer, 2005.

WRIGHT, S. J. **Primal-Dual Interior Point Methods**. Philadelphia: SIAM, 1997.