



GRUPOS DE SIMETRIAS E ESPAÇOS HOMOGÊNEOS

Suellen Aparecida Greatti (PIBIC/Uem), Alexandre José Santana (Orientador), e-mail: asantanauem@gmail.com, Thiago Fanelli Ferraiol (Coorientador), e-mail: tferraiol@gmail.com

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra/Matemática/ Geometria e Topologia

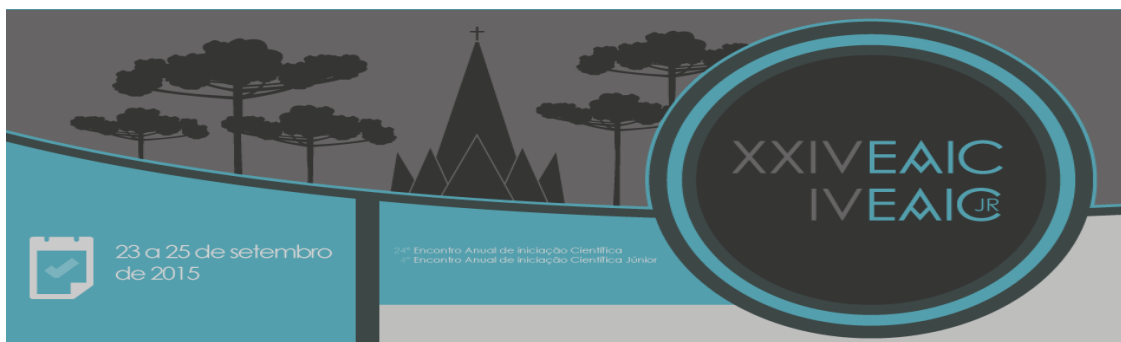
Palavras-chave: Geometria, topologia, simetrias

Resumo:

Em nosso projeto foi abordado o estudo de alguns espaços homogêneos via conceitos elementares de ação de grupos em variedades clássicas como esferas, cilindros e toros. Começando pelo entendimento do conceito de relações de equivalência, espaços quocientes e realização destes através de grupos de simetria. Em seguida, o objetivo foi de introduzir uma topologia nesses espaços.

Introdução

Uma das ideias mais antigas em geometria é o conceito de simetria. Para o estudo de tal conceito foi abordado na primeira parte do projeto um estudo de diversos quocientes que aparecem em Matemática, como quocientes de espaços vetoriais e quocientes de grupos. Através desses quocientes podemos formalizar uma grande variedade de objetos matemáticos do conhecimento popular, tais como a esfera e o toro. Uma alternativa equivalente para a formalização desses espaços vem da ideia da ação de grupos. Assim vimos quais grupos agem transitivamente nesses espaços, fornecendo realizações diversas para o mesmo objeto. Por exemplo, o toro pode ser realizado como o produto cartesiano de dois círculos, ou como o quociente do grupo $\mathbb{R}^2$ pelo $\mathbb{Z}^2$. Outro exemplo é dado pela realização da esfera em $\mathbb{R}^3$ pelo quociente do grupo $O(3)$ (grupo das isometrias lineares de $\mathbb{R}^3$) pelo grupo $O(2)$ (grupo das isometrias lineares de $\mathbb{R}^2$, ou, o que é o mesmo, grupo das rotações em $\mathbb{R}^2$). Seguindo a mesma ideia, foi feita diversas realizações para espaços clássicos como os toros.



Após algebrizarmos o processo de construção desses objetos clássicos, passamos ao estudo de suas propriedades topológicas. A topologia de todos esses espaços é fornecida pela topologia quociente. Essa topologia é proveniente da topologia do grupo (espaço total), e possui uma propriedade universal quando passada ao espaço quociente.

Esse modo de construir a topologia em espaços quocientes é uma ideia básica que pode ser aplicada à construção de diversos outros conceitos geométricos e analíticos, tais como métricas e medidas invariantes. Com essas construções, esses espaços quocientes são chamados de espaços homogêneos, pois todas suas propriedades são obtidas a partir de pequenas vizinhanças de um ponto que são simetricamente levadas para todos os pontos do espaço.

Materiais e métodos

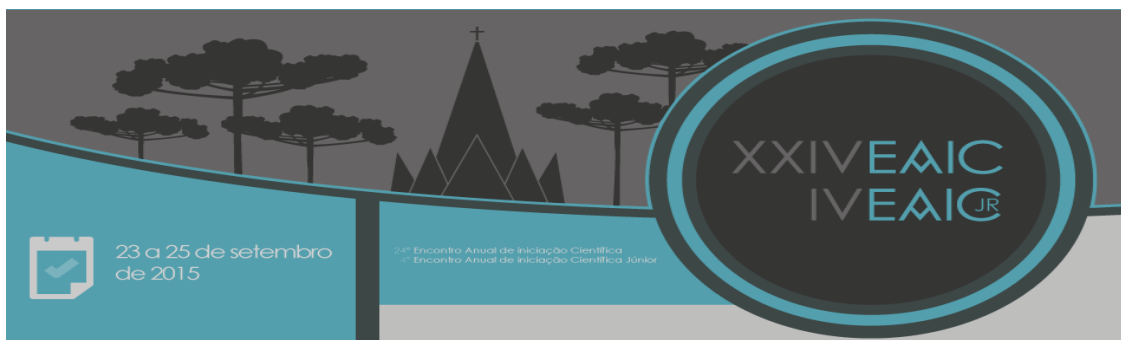
O trabalho foi realizado através de estudos de livros e textos indicados nas referências. Através de COELHO E LOURENÇO (2004), foi realizado o estudo de quocientes de espaços vetoriais. LIMA (2009) e MUNKRES (2000) foram a base para o estudo da topologia quociente. É importante lembrar que o texto de Luiz San Martin, chamado Grupos de Lie e submetido para publicação, foi fundamental para a construção dos espaços trabalhados, não citamos este texto nas referências por ainda não ter sido publicado.

Foram realizados ainda encontros semanais com os orientadores a fim de esclarecer dúvidas e dar direcionamento aos estudos, bem como a apresentação de seminários dos temas estudados, divulgando alguns resultados a outros alunos de graduação e de iniciação científica.

Resultados e Discussão

Nosso estudo, como já citado, começou por relações de equivalência, pelo qual podemos construir o conjunto dos números racionais através de uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Podemos também, construir alguns espaços como o cilindro e o toro, por exemplo, basta que consideremos o conjunto $X = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$, ou seja, X é um quadrado unitário em $\mathbb{R}^2$. Se nele definirmos a seguinte relação de equivalência: $(0, y) \sim (1, y)$, teremos que X com essa relação $\sim$ é um cilindro. Agora, se considerarmos em X a relação de equivalência: $(0, y) \sim (1, y)$ e $(x, 0) \sim (x, 1)$, teremos que X com essa relação de equivalência é um toro.

O próximo passo foi o estudo de quocientes de grupos, o qual também nos permite construir o toro e alguns outros espaços. Para a construção do toro, consideramos os grupos $G = (\mathbb{R}^2, +)$ e $H = (\mathbb{Z}^2, +)$, com a seguinte relação de equivalência: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1, y_1) - (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \mathbb{Z}^2$, ou seja, dois elementos de $\mathbb{R}^2$ estão relacionados se, e somente se, a



diferença entre eles possui coordenadas inteiras. Dessa maneira, podemos construir uma aplicação bijetora entre $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ e o toro, e como G/H ainda é um grupo, pois H é normal em G , temos que o toro possui a estrutura de grupo. Posteriormente, estudamos sobre ação de grupos, grupos de isotropia, órbitas, ações transitivas, e nesse contexto temos um resultado muito importante que também possibilita a construção dos objetos que é o seguinte: Se uma ação de G em um conjunto X for transitiva, então existe uma bijeção entre X e G/G_0 , onde G_0 é isotropia em algum x_0 pertencente a X .

Dessa forma é possível olhar a esfera S^2 , como o quociente $O(3)/O(2)$. Também foi realizado o cilindro, o toro, o espaço projetivo, a Grassmanniana, e a variedade Flag, como quocientes de conjuntos, através da ação de grupos.

Depois de construídos tais objetos, o objetivo foi estudar suas propriedades topológicas, através da topologia quociente, que torna os objetos em espaços homogêneos.

Conclusões

O projeto ampliou o conhecimento básico das disciplinas de graduação, que não nos oferece esse caminho de construir um mesmo objeto utilizando diversas formas diferentes. Permitindo ainda o aprofundamento de estudos sobre os conceitos de relações de equivalência, espaços quocientes e grupos de simetrias.

Agradecimentos

Agradeço aos orientadores, Alexandre José Santana e Thiago Fanelli Ferraiol, pelos direcionamentos e ensinamentos dados durante o projeto. Agradeço à Universidade Estadual de Maringá, pelo financiamento concedido.

Referências

- COELHO, F.U. e LOURENÇO, M.L., **Um curso de álgebra linear**. 1. ed. São Paulo: Edusp, 2004.
- LIMA, E.L., **Elementos de Topologia Geral**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.
- MUNKRES, J.R., **Topology**. 2.ed. New Jersey: Prentice Hall, 2000.