TEMPOS DE RETORNO EM UMA CAMINHADA ALEATÓRIA UNIDIMENSIONAL SIMULADA

Matheus Augusto Fabri (PIBIC/CNPq/UEM), Renio dos Santos Mendes (Orientador), e-mail: rsmendes@dfi.uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas / Maringá, PR.

Ciências Exatas: Física.

Palavras-chave: Processos estocásticos, sistemas periódicos, séries temporais.

Resumo

No presente trabalho, estudamos o comportamento da densidade de probabilidade (PDF) dos tempos de retorno. Isto no contexto de uma caminhada aleatória com uma força externa derivada de um potencial elástico generalizado. Para esse fim, utilizou-se de simulações com a forma discreta da equação de Langevin. Verificou-se que a PDF dos tempos de retorno é bem ajustada por uma distribuição de Weibull.

Introdução

Ao se iniciar o estudo em caminhadas aleatórias, uma equação de Langevin com uma força externa elástica é um dos primeiros casos a serem estudados, por sua simplicidade (TOMÉ, 2014). Todavia não há uma análise aprofundada do efeito que mudanças no expoente do potencial elástico, na constante elástica e no coeficiente de difusão causam nos tempos de retorno de uma caminhada aleatória. O presente trabalho é uma tentativa de se preencher esse vazio. Neste contexto, considera-se uma generalização do potencial elástico clássico, dada por

$$U(x) = K|x|^n,$$

em que K é a constante elástica e definimos n como um número real maior que um.

Os objetivos do presente trabalho são analisar as mudanças causadas pela alteração da constante elástica, coeficiente de atrito, constante de difusão e expoente do potencial na PDF dos tempos de retorno. O estudo ocorreu por meio de simulações e comparação com modelos já propostos na literatura.

Revisão de Literatura

A equação de Langevin de uma partícula em uma dimensão, sujeita a uma força externa derivada do potencial *U(x),* é

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\kappa n x(t)|x(t)|^{n-2} + \eta(t);$$

em que *κ* é a razão da constante elástica pelo coeficiente de atrito e *η* é um ruído branco, *i.e.*, possui as seguintes propriedades

$$\begin{cases} \langle \eta(t) \rangle = 0; \\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2D\delta(t-t'); \end{cases}$$

em que *D* é o coeficiente de difusão (TOMÉ, 2014). É visível que a equação de Langevin anterior é uma equação diferencial ordinária estocástica não linear, se *n*≠2. Portanto, a sua solução não é trivial de ser obtida, com exceção do caso harmônico, *n*=2, no qual essa se torna linear. Também é claro que o potencial *U(x)* é confinante.

A equação de Fokker-Planck associada ao sistema tem a seguinte forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(x,t) + n\kappa \frac{\partial (x|x|^{n-2}\rho(x,t))}{\partial x}.$$

Para os nossos propósitos, basta obtermos a solução estacionária. Considerando esta situação, a expressão anterior se torna uma equação diferencial ordinária e a solução, já normalizada, é

$$\rho_x(x) = \frac{\left(\frac{\kappa}{D}\right)^{\frac{1}{n}}}{2\Gamma(1+\frac{1}{n})} e^{\frac{-\kappa|x|^n}{D}},$$

em que Γ(*n*) é a função gama de Euler. Para o caso harmônico, a equação anterior se resume à distribuição normal. Independentemente de *n*, é visível também que o primeiro momento é nulo pelo fato da distribuição ser simétrica.

Consideremos um valor limiar *q* e *t(i)* o instante no qual uma série temporal aleatória passa pelo valor *q*. Por conseguinte, o *i*-ésimo tempo de retorno (*T(i)*) a *q* é *T(i)=t(i+1)-t(i)*. Pela natureza da série temporal, os tempos de retorno apresentam uma aleatoriedade. A PDF dos tempos de retorno pode ser comparada com, por exemplo, distribuições de Fréchet, Gumbell, Exponencial e de Weibull (KANTZ, 2008; BELANCON, 2011; BLENDER, 2008). A distribuição de Weibull é a mais relevante para o nosso trabalho e é dada por

$$P(T) = Z\frac{\gamma}{\beta}\left[\frac{T}{\beta}\right]^{\gamma-1} e^{-\left(\frac{T}{\beta}\right)^{\gamma}},$$

em que *γ*, *β* e *Z* são constantes reais positivas, sendo que a última é a constante de normalização. Denomina-se o expoente *γ* e *β* como parâmetros de forma e escala, respectivamente.

Na simulação utilizou-se da seguinte versão discreta da equação de Langevin do sistema

$$x_{l+1} = x_l - n\tau\kappa x_l |x_l|^{n-2} + \sqrt{2D\tau}\zeta_l,$$

considerando como posição inicial a origem, *τ* como uma constante de tempo denominada passo e *ζ* é uma variável aleatória distribuída conforme uma PDF normal de média nula e desvio padrão unitário. Dado o valor inicial, por recorrência, obteve-se os demais valores de *x* da série temporal das posições. Para o ajuste da PDF dos tempos de retorno utilizou-se o método de máxima verossimilhança.

Resultados e Discussão

Obteve-se que *n* e *κ* mudam os parâmetros de escala e forma da PDF dos tempos de retorno, mas em geral todas elas são bem aproximadas por distribuições de Weibull. Todavia verificou-se que essa PDF é independente do valor do coeficiente de difusão, quando *n*=2.

Para *κ* pequenos, algo próximo a 0.0001, obteve-se que a PDF dos tempos de retorno foi melhor ajustada por uma distribuição de Pareto, isto é, uma lei de potência. Contudo para *κ* maiores, perto de 25, a PDF dos tempos de retorno é melhor ajustada por uma distribuição exponencial. Podemos considerar estes dois casos anteriores como casos limites da distribuição de Weibull, respectivamente, $\gamma \approx 0$ e $\gamma \approx 1$. Todavia em função de *n* o oposto ocorre, quanto maior esse mais a PDF dos tempos de retorno se aproxima de uma lei de potência e para valores pequenos de *n* se aproxima de uma distribuição exponencial.

Conclusões

Conclui-se que o melhor ajuste para a distribuição dos tempos de retorno é dado pela distribuição de Weibull e a PDF das posições é uma gaussiana generalizada. Futuros trabalhos ainda necessitam ser feitos nesse assunto.

Estes podem focar na relação do expoente da função de correlação da série das posições e a distribuição dos tempos de retorno com o auxílio da técnica *Detrended Fluctuation Analisys* (BUNDE, 2001). Poderiam ainda ser analisados a série temporal das velocidades e seus respectivos tempos de retorno. Outros estudos podem também ser focados na dinâmica do sistema fora do regime estacionário.

Agradecimentos

Aos professores Sergio de Picoli Junior e Haroldo Valentin Ribeiro, ao grupo de pesquisas em sistemas complexos da UEM (COMPLEX-UEM) e à CAPES/CNPq pelo apoio financeiro dado ao projeto.

Referências

TOMÉ, T.; DE OLIVEIRA, M. J. **Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade.** Segunda edição, São Paulo, EDUSP, 2014.

KANTZ, H.; SANTHANAM, M. S. Return interval distribution of extreme events and long-term memory. **Physical Review Letters E**, v. 78, n. 5, (051113) 2008.

BELANCON, M. P.; LENZI, E. K.; MALACARNE, L. C.; MENDES, R. S.; RIBEIRO, H. V. On the dynamics of bubbles in boiling water. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 44, p. 178-183, 2011.

BLENDER, R.; FRAEDRICH, K.; SIENZ, F. Extreme event return times in long-term memory processes near 1/*f*. **Nonlinear Processes in Geophysics**, v. 15, p. 557-565, 2008.

BUNDE, A.; HAVLIN, S.; KANTELHARDT, J. W.; KOSCIELNY-BUNDE, E.; REGO, H. H. A. Detecting Long-range Correlations with Detrended Fluctuation Analisys. **Physics A**, v. 295, p. 441-454, 2001.