



EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS PARA O PÊNDULO SIMPLES

Iago Aparecido da Silva Picolli (PIC/UEM), Fábio Matheus Amorin Natali (Orientador), e-mail: iago.picolli@hotmail.com.

Universidade Estadual de Maringá/Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Área: Matemática.

Subárea: Análise.

Palavras-chave: equações diferenciais ordinárias, funções elípticas de Jacobi e pêndulo simples.

Resumo:

Nesta apresentação estudaremos um dos principais resultados dentro da física-matemática que é a equação que modela o pêndulo simples. Tal modelo matemático é dado por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não linear. Obteremos soluções explícitas através do método de separação de variáveis juntamente com as funções elípticas de Jacobi.

Introdução

As equações ordinárias, em particular, as equações de segunda ordem nasceram juntos com a Mecânica. Visando formular problemas relevantes, desenvolvemos nesta aplicação, certo cuidado ao modelo físico estudado. Assim, para nós, a solução de um problema não é apenas uma fórmula ou uma função, mas antes, algo pleno de significado e de informações sobre o fenômeno que estamos considerando.

Uma bela aplicação para equações diferenciais de segunda ordem, com soluções periódicas é o pêndulo simples. Este é bem estudado em cursos de Física/Mecânica. Porém, a solução dada nestes cursos é obtida apenas para oscilações pequenas do ângulo formado pela corda e o ponto fixo de uma de suas extremidades. Temos como objetivo, encontrar soluções mais gerais onde não precisamos considerar tais pequenas oscilações.





Este modelo físico consiste de uma partícula de massa m , fixada na extremidade inferior de um fio inextensível (idealmente sem massa) de comprimento l , cuja extremidade superior esta fixada. Foi através deste exemplo que foram encontradas métodos para calcular a aceleração gravitacional, usadas desde a época de Newton. Ao ser aperfeiçoado esses métodos, a determinação da gravidade em vários pontos da terra serviu para, em primeira aproximação mostrar a sua não esfericidade.

Materiais e métodos

O projeto foi desenvolvido por meio de pesquisas bibliográficas e apresentações de seminários semanais ao orientador a fim de expor os resultados obtidos e de esclarecer possíveis dúvidas.

Resultados e Discussão

Apresentamos abaixo os principais resultados estudados sobre os quais falaremos na apresentação. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências listadas ao final desse resumo.

Inicialmente, os estudos foram baseados no conceito de equações diferenciais ordinárias.

Definição 01: Sejam p , q e f funções reais cujo domínio seja um intervalo (a,b) e que dependem suavemente de t . Nosso intuito é dar sentido a uma função $X(t)$ que resolve a equação diferencial de segunda da forma: $X''(t)+p(t)X'(t)+q(t)x(t)=f(t)$.

Definição 02: Uma função X duas vezes diferenciável definida em um intervalo contido em $(a;b)$ é uma solução da equação diferencial de ordem dois descrita na Definição 01, se para todo t , $X(t)$ satisfaz a equação.

No projeto vimos alguns métodos relevantes para encontrar tais soluções para equação.

Durante o projeto foi visto, também uma introdução às funções elípticas de Jacobi. Tais funções são periódicas e têm propriedades parecidas com as funções trigonométricas.





Apresentamos então o nosso problema. De acordo com as considerações feitas sobre a corda e a partícula, vamos supor que o movimento se dê em um plano vertical. Tal problema, após algumas modelagens e usando ferramentas físicas, como a segunda lei de Newton, se torna um problema de equações diferenciais de segunda ordem dada por $f'' + \text{sen}(f) = 0$.

Com várias manipulações algébricas e através de ferramentas de equações diferenciais ordinárias, encontramos a solução explícita que descreve o movimento e a velocidade do pêndulo simples. Veremos que tais soluções são dadas em termos das funções elípticas de Jacobi.

Conclusões

Com base na teoria de equações diferenciais e conceitos das funções elípticas de Jacobi, encontramos uma solução geral para o pêndulo simples.

Agradecimentos

Agradeço ao PET matemática pelo apoio estrutural e financeiro.

Referências

BOWMAN, F. **Introduction to elliptic functions with applications**. Dover publications, Nova York, 1961.

GUEDES FIGUEIREDO, D. e FREIRIA NEVES, A. **Equações Diferenciais Aplicadas**. Editora do IMPA, Rio de Janeiro, 2014

LAGES LIMA, E. **Análise Real**. Editora do IMPA, Rio de Janeiro, 1989.

