TOPOLOGIAS FRACAS

Geliane Beatriz Pipino Tavares (PIBIC/FA), Claudete Webler Martins (Orientadora), e-mail: cmwebler@uem.br, Rodrigo Martins (Co-orientador), e-mail: rmartins@uem.br;

Universidade Estadual de Maringá/Centro de Ciências Exatas e da Terra/ Maringá, PR.

Área/ **Subárea:** Matemática/ Análise.

Palavras-chave: Topologia, Topologia Métrica, Espaços Topológicos.

Resumo:

Estudamos as noções básicas sobre uma topologia, em especial as topologias fracas.

Introdução

Estudamos a estrutura dos espaços topológicos e apresentamos alguns exemplos. Estudamos um exemplo especial de topologia, a denominada topologia métrica. Para concluir estudamos os conceitos de topologia fraca e convergência fraca.

Materiais e métodos

Foram realizadas pesquisas bibliográficas, estudo e discussão teórica sobre o tema abordado.

Resultados e Discussão

Apresentamos abaixo os principais resultados estudados sobre os quais falaremos na apresentação, que podem ser encontrados em (BRÉZIS, 1983), (CAVALCANTI,2011), (LIMA, 1977) e (MUNKRES, 2000).

Definição 01: Uma topologia num conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X, chamados abertos da topologia tais que:

- $\emptyset \,\epsilon\, \tau$ e $X \,\epsilon\, \tau$.
- Se $A_1, A_2, \ldots , A_n \,\epsilon\, \tau$ então $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \,\epsilon\, \tau$.
- Dada uma família arbitrária $(A_\lambda)_{\lambda \epsilon L}$ com $A_\lambda \,\epsilon\, \tau$, para cada $\lambda \epsilon L$, então tem-se $U\, A_\lambda \,\epsilon\, \tau$.

Definição 02: Um espaço topológico é um par (X, τ) onde X é um conjunto e τ uma topologia de X.

Exemplo 01: (Topologia métrica) Seja (X, d) um espaço métrico. Existe uma topologia natural sobre X, construída da seguinte forma:
$\tau = \{A \text{ c } X;$ para todo $a \,\epsilon\, A$, existe $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \text{ c } A\}$, sendo
$B(a, \varepsilon) = \{x \,\epsilon\, X; d(a, x) < \varepsilon\}$.

Definição 03: Sejam (X_1, τ_1) e (X_2, τ_2) dois espaços topológicos e f: $X_1 \rightarrow X_2$ uma aplicação. Dizemos que f é contínua em $x \,\epsilon\, X_1$, se dada V, vizinhança de f(x) em X_2, existe uma vizinhança U de x em X_1 tal que $f(U)$ c V.
Dizemos que f é contínua em X_1 quando for contínua em todo ponto de X_1.

Definição 04: Sejam (X_1, τ_1) e (X_2, τ_2) dois espaços topológicos. Se τ_1 c τ_2, dizemos que a topologia τ_1 é mais grossa que τ_2 ou que τ_2 é mais fina do que τ_1.

Exemplo 02: Sejam X um conjunto arbitrário e τ uma topologia qualquer de X. Considere: $\tau_1 = \{X, \emptyset\}$ a topologia trivial e τ_2 a topologia discreta. Temos: τ_1 c τ c τ_2.

Proposição 01: Seja $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \,\epsilon\, I}$ uma família de topologias sobre X. Então $\tau = \cap \tau_\alpha$ é uma topologia sobre X.

Observação 01: Segue da Proposição anterior que a topologia $\tau = \cap \tau_\lambda$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. τ c τ_λ, para todo λ e assim τ_λ é mais fina do que τ, para todo λ.
2. Se existe τ' c τ_λ, para todo λ então τ' c τ.

Proposição 02: Sejam X um conjunto arbitrário, Y um espaço topológico e φ: $X \rightarrow Y$ uma aplicação. Então a família de todos os subconjuntos de X da forma $\varphi^{-1}(V)$, onde V é um aberto em Y, constitui uma topologia sobre X.

Exemplo 03: Consideremos X um conjunto arbitrário, $\{Y_i, \sigma_i\}_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos e $\{\phi_i\}_{i \in I}$ uma família de aplicações $\phi_i: X \to Y_i$. Pela Proposição anterior, cada $i \in I$ induz uma topologia $\mathcal{T}_i$ sobre X, para a qual ϕ_i é contínua. No entanto, fixado i, não é garantido que ϕ_j, para $i \neq j$, seja contínua sobre o espaço $(X, \mathcal{T}_i)$. Procuramos então a topologia com menos abertos (menos fina ou mais grossa) em relação a qual todas as ϕ_j, $j \in I$, sejam contínuas. Essa topologia que procuramos é denominada *topologia fraca* gerada ou induzida pelas aplicações ϕ_i.

Conclusões

O objetivo do projeto de iniciação científica era estudar os conceitos de espaços topológicos, em especial as topologias fracas. Tal objetivo foi alcançado através dos conceitos e resultados estudados ao longo do trabalho.

Agradecimentos

Agradeço à Fundação Araucária, de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Estado do Paraná, pelo apoio financeiro.

Referências

BRÉZIS, H. **Analyse Functionnelle**, Théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N., KOMORNIK, V. **Introdução à Análise Funcional.** Maringá**:** Eduem, 2011.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos.** Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

MUNKRES, J. **Topology**, Uper Saddle River: Prentice Hall, 2000. 514p.