



ESTUDO DAS EQUAÇÕES DE LOTKA-VOLTERRA

Raul de Palma Aristides (PIBIC/CNPq/FA/Uem), Breno Ferraz de Oliveira(Orientador), e-mail: breno@dfi.uem.br

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas / Maringá,PR.

Área: Ciências Exatas e da Terra / Física

Palavras-chave: Equações de Lotka-Volterra, dinâmica populacional, equações diferenciais.

Resumo:

O objetivo da dinâmica populacional é descrever, por meio de modelos de crescimento populacional, a evolução temporal de uma população. Esses modelos permitem analisar a evolução temporal da população quantitativamente e qualitativamente. Neste trabalho, primeiramente, introduzimos o modelo de crescimento exponencial de Malthus, que descreve o crescimento de uma comunidade de microorganismos, e o modelo logístico de Verhulst, que descreve o crescimento de populacional de uma forma mais realista. Esses modelos foram estudados a partir das equações diferenciais que as descrevem e suas soluções analíticas. Em um segundo momento, estudamos as equações de Lotka-Volterra, que descrevem a evolução temporal de duas populações que possuem uma relação de presa e predador. Por se tratar de um sistema de equações diferenciais não-lineares, não é possível obter uma solução explícita analiticamente, apesar de discutimos qualitativamente a dinâmica do sistema por meios analíticos. Neste trabalho, por meio do método de Runge-Kutta, foi obtida a solução numérica para as equações de Lotka-Volterra. Além disso influência dos parâmetros presentes nessas equações foi analisada.

Introdução

Dinâmica populacional é uma área de estudo interdisciplinar que possibilita combinar a física com a biologia e a geografia. O objetivo da dinâmica





populacional é caracterizar a variação da quantidade de indivíduos de uma população em um dado período de tempo. Isso é feito por meio de modelos matemáticos que traduzem o comportamento da população de interesse, dessa forma podemos avaliar as variações na densidade populacional e determinar a evolução temporal da população. Entendemos como população um conjunto de indivíduos da mesma espécie que ocupam a região geográfica. O interesse pelo comportamento de populações é antigo. Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci nascido na República de Pisa por volta de 1170 apresentou em seu livro “Liber abaci”, um problema de dinâmica populacional: determinar o crescimento de uma população de coelhos. Outro modelo conhecido é o de Malthus, proposto pelo economista britânico Thomas Malthus, que apesar de não ser realístico, exerceu grande influência na teoria da evolução de Charles Darwin e no desenvolvimento da dinâmica populacional (BACAËR, 2011; SMITH, 2013). Pierre-François Verhulst, nascido em Bruxelas no ano de 1804 propôs o modelo que hoje é conhecido por modelo Logístico. Verhulst concluiu que o crescimento populacional era limitado, e a população tendia a um estado estacionário (BRAUER, 2012).

Existem também modelos como o de Lotka-Volterra, que descrevem a dinâmica de duas populações. Vito Volterra, nascido em 1860 em Ancona foi um grande físico-matemático italiano e por volta de 1920 desenvolveu um modelo que buscava explicar as flutuações na população de peixes do mar Adriático, para isso, Volterra assumiu que peixes e tubarões estavam em uma relação de presa-predador. No mesmo período, Alfred J. Lotka nascido em Lwów em 1880 autor de vários trabalhos na área de dinâmica populacional também chegou a um modelo semelhante quando estudava reações químicas, por isso o modelo hoje é conhecido como modelo de Lotka-Volterra (MURRAY, 2002; DO NASCIMENTO, 2012). O modelo é dado pelo par de equações diferenciais não lineares

$$\dot{x} = x(\alpha - \beta y),$$

$$\dot{y} = y(\lambda x - \gamma),$$

onde a variável x representa a população de presas e y a população de predadores. Os parâmetros α e λ estão relacionados ao crescimento das populações, enquanto β e γ estão relacionados à interações que ocorrem entre as duas populações.





Materiais e Métodos

O trabalho descrito neste resumo foi desenvolvido no Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá. Trata-se de pesquisa exploratória, qualitativa e bibliográfica, com coleta de dados em fontes documentais como livros, dissertações, teses e artigos sobre Dinâmica Populacional, dando maior enfoque às Equações de Lotka-Volterra.

Resultados e Discussão

A solução das equações de Lotka-Volterra pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem possibilitou a confecção do gráfico apresentado na Figura 1. A evolução apresentada pelas populações está de acordo com o previsto. Além disso, foi possível verificar como as populações de presas e predadores respondem a variações dos parâmetros α , β , λ e γ , quando um parâmetro é variado e os outros são mantidos fixos.

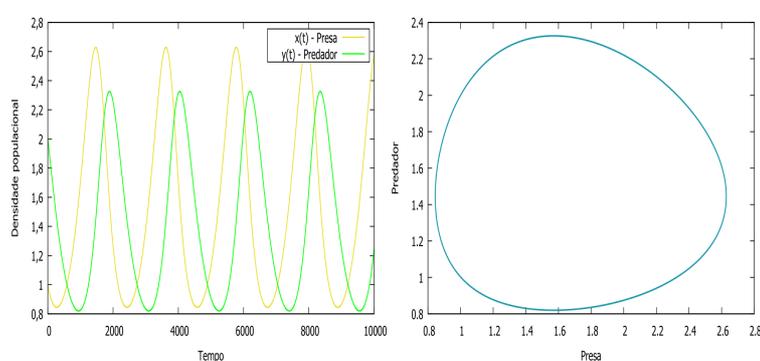


Figura 1 - Gráfico das populações em função do tempo e espaço de fase do sistema.

Conclusões

Na primeira parte deste trabalho abordamos alguns os modelos de crescimento populacional, tais modelos possuem aplicações, mas o modelo Logístico se mostra mais realístico, uma vez que a população não cresce indefinidamente, mas atinge um limite que depende da capacidade máxima K . As equações de Lotka-Volterra, que descrevem a dinâmica de duas espécies em uma relação de predação, foram abordadas na segunda parte do trabalho. O método de Runge-Kutta foi utilizado para solucionar





numericamente as equações, e então foi feita uma análise da evolução temporal das populações em função dos parâmetros α , β , λ e γ , que compõe as equações de Lotka-Volterra. Foi possível concluir que as populações reagem de maneira diferente a cada parâmetro, e ainda, que estudos com uma variação maior dos parâmetros podem verificar que todos os comportamentos apresentados conforme os parâmetros foram variados são cíclicos.

Agradecimentos

Ao programa CNPq/FA/UEM/PIBIC pelo financiamento do projeto de pesquisa.

À minha mãe, Rosa Maria, por ter me apoiado incondicionalmente em toda minha vida acadêmica.

Ao meu orientador Breno Ferraz de Oliveira, pelo suporte e pela amizade.

Referências

Livro:

BACAËR, N. **A Short History of Mathematical Population Dynamics**. Springer, 2011.

SMITH, D. P. **Mathematical Demography: Selected Papers**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

BRAUER, F. **Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology**. Springer-Verlag New York, 2012.

MURRAY, J. D. **Mathematical biology. I. An introduction**. Springer, 2002.

Monografia:

DO NASCIMENTO, A. **“Introdução à dinâmica de crescimentos populacionais”**. Trabalho de conclusão de curso - DFI, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2012.

