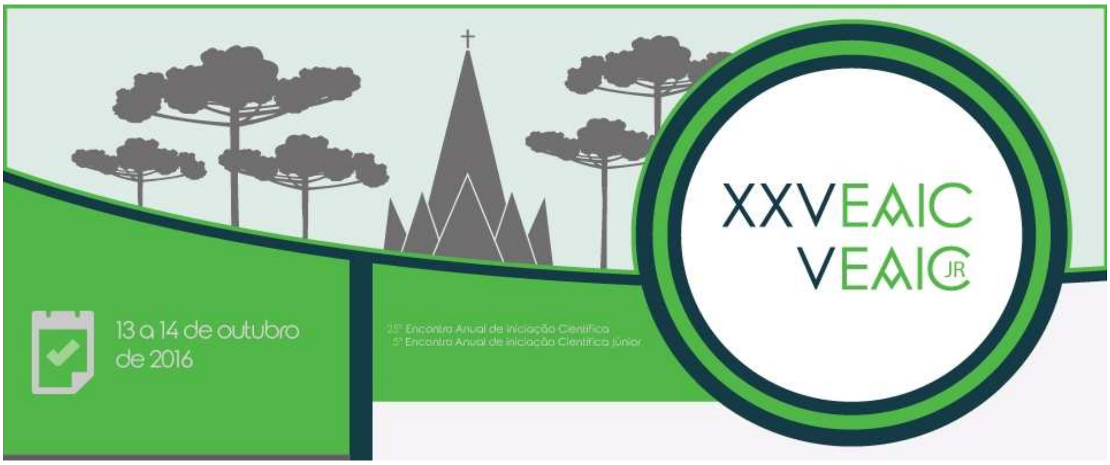


ASPECTOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL CLÁSSICA

Matheus Augusto Fabri (PIBIC/CNPq/FA/UEM), Josiney Alves de Souza (Orientador), e-mail: matheus.a.fabri@gmail.com.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas / Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra: Matemática / Probabilidade e Estatística

Palavras-chave: Geometria diferencial clássica, símbolos de Christoffel, geometria intrínseca.

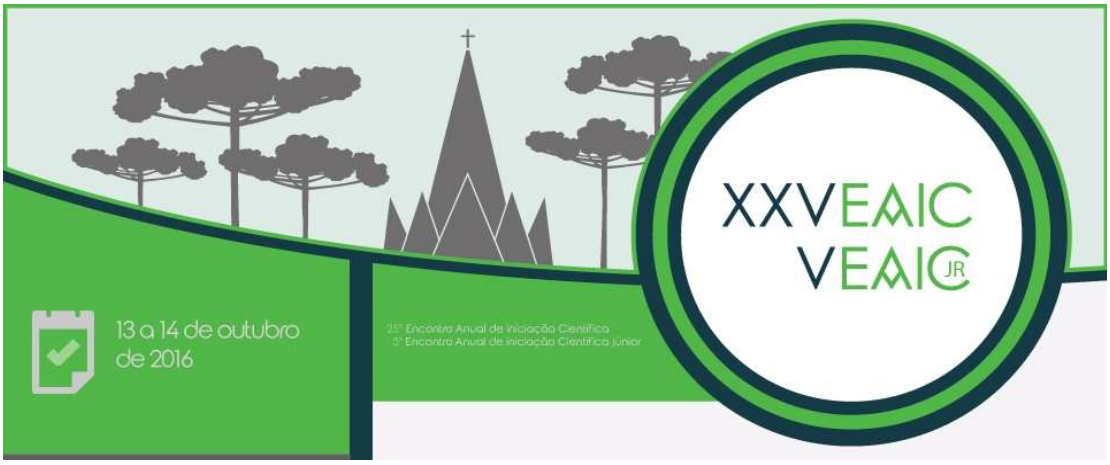
Resumo

No presente trabalho, demonstramos o Teorema Egregium. Para este fim, primeiro será visto isometrias locais e discutiremos algumas propriedades destas. Feito isso definiremos os símbolos de Christoffel e então veremos a invariância destes por isometrias locais. Por fim explicitaremos a curvatura Gaussiana em termos da primeira forma fundamental, mais exatamente em termos dos símbolos de Christoffel, e com isso provaremos o teorema Egregium.

Introdução

O estudo de superfícies tomou um novo fôlego com Gauss em seu trabalho intitulado *Disquisitiones generales circa superfícies curvas* em 1827, quando este as parametrizou com funções vetoriais de duas variáveis reais. Contudo os principais feitos deste trabalho são a definição de isometria e o Teorema Egregium (KATZ, 2009).

Gauss introduziu o conceito de aplicação conforme, como sendo uma função que preserva os menores elementos da superfície e além disso deu indícios que estas se relacionariam com a teoria da análise complexa. Ele também definiu isometrias e estabeleceu o Teorema Egregium (do latim Teorema Notável). Este estabelece que se uma superfície é desenvolvível em outra, isto é, pode ser transformada sem deformar distâncias, então as



duas possuem a mesma curvatura gaussiana. Assim a curvatura gaussiana depende somente de parâmetros inerentes a superfície e não da sua localização espacial, inaugurando assim uma área da geometria denominada intrínseca (KATZ, 2009).

Na primeira seção veremos sistematicamente isometrias e aplicações conformes, contudo na segunda definiremos símbolos de Christoffel e denotaremos a curvatura Gaussiana em termos destes. Por último, provaremos o teorema Egregium.

Isometrias

Uma isometria local é uma aplicação entre superfícies que preserva o produto interno, mais precisamente:

Definição. Sejam *S* e *S'* superfícies regulares, ***p*** um ponto de *S*, *V* uma vizinhança de ***p*** e *φ:V→S'*. A aplicação *φ* é dita uma isometria local se existe uma vizinhança de *φ(**p**)* em que esta é um difeomorfismo e

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle \mathrm{D}\varphi_p(w_1), \mathrm{D}\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)} \quad , \quad \forall w_1, w_2 \in T_pS.$$

Caso a aplicação *φ* seja única para todo ponto da superfície estas são ditas globalmente isométricas.

A isometria é claramente uma relação de equivalência entre duas superfícies, dado que esta é reflexiva, simétrica e transitiva. Sendo assim o conjunto de todas as superfícies isométricas formam uma classe de equivalência dentro do conjunto de todas as superfícies em R^3. As isometrias de uma superfície *S* formam um grupo no R^3 sob composição, denominado grupo de isometrias de *S* (DO CARMO, 1976).

Uma condição necessária e suficiente para que um difeomorfismo entre superfícies seja uma isometria é que este preserve a norma de vetores no plano tangente (DO CARMO, 1976). Logo fica claro que curvas em superfícies e a imagem destas por aplicações isométricas possuem o mesmo comprimento. A definição dada anteriormente é um pouco deficiente quando se trata de aplicá-la a duas superfícies quaisquer, pois não é essencialmente simples obtermos isometrias. Contudo um critério suficiente para a isometria local é dado pelo teorema a seguir.

Teorema 1. Sejam $\boldsymbol{X_1}:U\rightarrow S$ e $\boldsymbol{X_2}:U\rightarrow S'$ superfícies parametrizadas regulares e ***p*** um ponto de *S*. Se, em uma vizinhança de ***p***, os coeficientes da primeira forma fundamental das duas superfícies são iguais, então $\boldsymbol{X_2}\circ\boldsymbol{X_1}^{-1}$ é uma isometria local.

Símbolos de Christoffel

No caso de curvas no R^3 temos que uma base natural para a curva era o triedro de Frenét (DO CARMO, 1976). Para uma superfície regular parametrizada $\boldsymbol{X}:U\rightarrow S$, $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(u,v)$, uma base natural seria o triedro $\{\boldsymbol{X}_u, \boldsymbol{X}_v, \boldsymbol{N}\}$, com ***N*** como o vetor normal a superfície, *id est*, a aplicação de Gauss. Sendo assim podemos representar as derivadas destes vetores nesta base. Logo os símbolos de Christoffel, Γ_{ij}^k, são definidos por meio do sistema

$$\boldsymbol{X}_{,ij} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k} \boldsymbol{X}_{,k} + G_{ij}\boldsymbol{N}.$$

Em que usou-se a notação da derivada vírgula e G_{ij} são os coeficientes da segunda forma fundamental (DO CARMO, 1976). Claramente Γ_{ij}^k comutam em relação aos índices inferiores. Resolvendo este sistema temos como solução

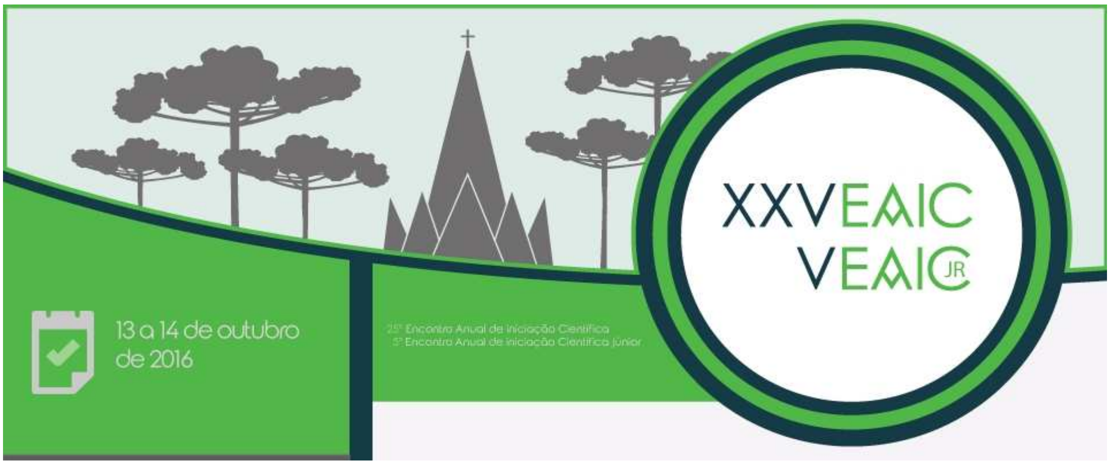
$$\Gamma_{ij}^{k} = \sum_{m=1}^{2} \frac{g_{im}^{-1}(g_{im,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m})}{2}.$$

Logo os símbolos de Christoffel dependem somente dos coeficientes da primeira forma fundamental e de suas derivadas sendo assim é imediato que

Teorema 2. Os símbolos de Christoffel são invariantes por isometrias locais.

O que é consequência do Teorema 1. Consequentemente do Teorema 2 temos que qualquer quantidade expressa em termos de Γ_{ij}^k é invariante por isometrias locais.

FUNDAÇÃO ARAUCÁRIA
CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
PARANÁ GOVERNO DO ESTADO Secretaria da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior



Demonstração do Teorema Egregium

As superfícies parametrizadas $\boldsymbol{X}:U \to S$ são, por definição, contínuas. Logo estas gozam da seguinte igualdade

$$(\boldsymbol{X}_{vv})_u = (\boldsymbol{X}_{uv})_v.$$

Por meio de manipulações elementares desta, é possível deduzir a seguinte expressão para a curvatura gaussiana

$$K = E^{-1}((\Gamma^2_{11})_v - (\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - (\Gamma^2_{12})^2).$$

Consequentemente temos o Teorema Egregium:

> **Teorema Egregium.** A curvatura gaussiana é invariante por isometrias locais.

É evidente que este decorre imediatamente do Teorema 2.

Conclusões

Do Teorema Egregium temos que superfícies completamente distintas possuem a mesma curvatura, como por exemplo o cilindro e o plano, ou a catenoide e o hiperboloide. Contudo, suponhamos *S* e *S'* superfícies com curvaturas gaussianas distintas e suponhamos por absurdo que exista uma isometria local entre elas. Portanto, do Teorema Egregium, as curvaturas são as mesmas. O que é um absurdo. Por conseguinte, superfícies com curvaturas gaussianas distintas não admitem isometrias locais.

Agradecimentos

Aos professores Manfredo P. do Carmo, Elon Lages Lima e à CAPES/CNPq pelo apoio financeiro dado ao projeto.

Referências

DO CARMO, M. P. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. 1 ed. Nova Jersey: Prentice Hall, 1976.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics - An Introduction**. 3 ed. Columbia: Addison-Wesley, 2009.