A PRIMEIRA FORMA FUNDAMENTAL EM SUPERFÍCIES

Elaine Cristina Sturion (PIC/UEM), Marcos André Verdi (Orientador), Eduardo de Amorim Neves (Coorientador) e-mail: maverdi@uem.br

Universidade Estadual de Maringá / Departamento de Matemática

Ciências Exatas e da Terra – Matemática

Palavras-chave: superfícies, métrica, geometria diferencial.

Resumo:

O presente trabalho apresenta um estudo sobre a primeira forma fundamental de uma superfície. Seu estudo possui aplicações em nosso mundo, pois, às vezes precisamos determinar distâncias entre dois pontos e áreas da superfície em que vivemos. A primeira forma fundamental nos possibilitar fazer tais medições, pois é uma estrutura geométrica associada à superfície, e nos possibilita resolver problemas métricos de uma superfície sem fazer referência ao ambiente no qual S está mergulhada. Neste trabalho são apresentados exemplos onde é possível aplicar a primeira forma fundamental no cálculo de curvas e áreas em superfícies.

Introdução

O objetivo desse trabalho foi fazer um estudo sobre a primeira forma fundamental de uma superfície. A maneira natural de medir ângulos e distâncias em uma superfície é introduzir no plano tangente em cada ponto um produto interno. Como uma superfície é um subconjunto bidimensional do espaço tridimensional R^3, o plano tangente em cada ponto é um subespaço vetorial de R^3. Desta forma, o produto interno introduzido é a restrição do produto interno de R^3. Uma vez introduzido o produto interno em cada plano tangente, não precisamos mais considerar o espaço ambiente para estudar certos aspectos geométricos da superfície. Essa é a ideia da primeira forma fundamental, que nos permite medir área de regiões e o comprimento de curvas em uma superfície.

Para o estudo da primeira forma fundamental se faz necessário definir uma curva regular parametrizada em uma superfície regular, pois a partir dessa é possível definir um plano tangente a um dado ponto da superfície e, consequentemente, é possível definir a primeira forma fundamental. Para isso foram estudados conceitos relacionados a curvas regulares parametrizadas, comprimento de arco, superfícies regulares, entre outros que se fizeram necessários.

Materiais e métodos

Os materiais base utilizados foram os livros Carmo (2012) e Tenenblat (2008). O método adotado foi o estudo individual de tópicos relacionados ao conceito de curvas e superfícies regulares, com apresentação semanal de seminários ao orientador e coorientador.

Resultados e Discussão

Uma curva parametrizada regular é uma aplicação diferenciável α definida em um intervalo aberto I da reta real R e assumindo valores em R^3, tal que a derivada não se anula em nenhum ponto de I. A derivada $\alpha'(t)$ é chamada vetor tangente à curva em t. De uma maneira bastante informal, uma superfície regular em R^3 pode ser vista como um subconjunto de R^3 obtido tomando-se pedaços do plano, deformando-os e colando-os entre si, de tal modo que a figura resultante não possua pontos, arestas ou auto-interseções. Formalmente, definimos uma superfície regular como um subconjunto S de R^3 tal que para cada ponto p em S existe uma aplicação diferenciável $X:U \to V \cap S$, onde U é um aberto do plano e V um aberto de R^3 contendo p tal que X é um homeomorfismo diferenciável cuja diferencial é injetiva em todo ponto de seu domínio. A aplicação X é chamada uma parametrização em p.
Definimos o plano tangente a superfície S em um ponto p como o conjunto dos vetores tangentes $\alpha'(0)$ à curvas parametrizadas regulares α contidas em S e tais que $\alpha(0)=p$. De forma equivalente, o plano tangente pode ser definido como a imagem de R^2 pela diferencial de uma parametrização X, calculada na pré-imagem de p. Daí segue que o plano tangente é um subespaço vetorial de R^3, o qual será denotado por T_pS. Uma base natural para T_pS é formada pelos vetores $X_u(q)$ e $X_v(q)$, onde o subíndice significa a derivada parcial em relação às variáveis u e v do plano e $X(q)=p$.

Em cada plano tangente, podemos considerar a restrição do produto interno de R^3, o qual será denotado por $\langle\ ,\ \rangle_p$. Associamos a esse produto interno a forma quadrática I_p dada por $I_p(w)=\langle w,w\rangle_p$, para cada w em T_pS. Essa forma quadrática é a primeira forma fundamental, e expressa como a superfície herda o produto interno natural do R^3. Uma vez obtida, ela nos permite fazer medidas sobre a superfície sem fazer menção ao espaço ambiente onde está a superfície.

Podemos expressar a primeira forma fundamental em uma base $\{X_u, X_v\}$ associada a uma parametrização X(u,v) em p. Como um vetor tangente w em T_pS é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t)=X(u(t), v(t))$, com $p=\alpha(0)=X(u_0,v_0)$, temos que $I_p(w)= I_p(\alpha'(0))=\langle\alpha'(0), \alpha'(0)\rangle_p$. Fazendo algumas simplificações, obtemos uma expressão da forma

$$I_p(w)=E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2,$$

onde $E=\langle X_u, X_u\rangle_p$, $F=\langle X_u, X_v\rangle_p$, $G=\langle X_v, X_v\rangle_p$, que são chamados de coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ de T_pS. O comprimento de curvas e a área de uma região na superfície são descritos abaixo em termos desses coeficientes.

Comprimento de curva sobre uma superfície

Seja $\alpha: I\subset R\to S$ uma curva parametrizada, o comprimento de arco de α de um ponto $\alpha(t_0)$ até um ponto $\alpha(t_1)$ é dado por

$$s=\int_{t_0}^{t_1}|\alpha'(t)|dt=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{I_p(\alpha'(t))}dt=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2}dt$$

Área de uma superfície

Seja Q uma região limitada em R^2 que está contida no domínio de uma parametrização $X: U\to S$. Então $X(Q)=P$ é uma região limitada em S. A área da região P é dada por

$$A(P)=\iint_Q |X_u\times X_v|du\,dv=\iint_Q \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

Conclusões

Vimos como é possível fazer medidas em uma superfície regular sem levar em consideração o espaço em que ela se encontra por meio da primeira forma fundamental. Verificamos que a primeira forma fundamental é uma estrutura geométrica característica da superfície, e por meio desta é possível fazer medidas de comprimentos e áreas na superfície. Tal estrutura possui aplicações em nosso mundo e por isso é de importância seu estudo.

Referências

DO CARMO, M. P. **Geometria diferencial de curvas e superfícies.** Textos Universitários. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. São Paulo: Blucher, 2008.