SOLUÇÃO VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL HIPERBÓLICA

Lucas da Penha Soares (PIBIC/CNPq/Uem), Juan Amadeo Soriano Palomino, e-mail: jaspalomino@uem.br

Universidade Estadual de Maringá/Centro de Ciências Exatas / Maringá, PR.

Área do conhecimento: Matemática / Análise

Palavras-chave: método das diferenças finitas, equações diferenciais parciais, *MatLab*®.

Resumo:

Este artigo propõe a solução de problemas de vibrações transversais, descritos pelas Equações Diferenciais Parciais Hiperbólicas, onde uma corda vibra num plano e a função que a representa depende das variáveis tempo e deslocamento. O problema em questão, foi resolvido pelo Método das Diferenças Finitas construindo um algoritmo no software *MatLab*® para visualizar a superfície solução.

Introdução

Considere um Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF) descrito por uma Equação Diferencial Parcial (EDP) Hiperbólica:

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,; \quad x \in (0,L) \; e \; t \in (0,T) \\ u(0,t) = u(L,T) = 0 \quad ; \quad 0 < t < T \\ u(x,0) = f(x) \quad ; \quad 0 \le x \le L \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \quad ; \quad 0 \le x \le L \end{cases} \text{, onde } \alpha \text{ é constante.}$$

O objetivo deste trabalho é obter a solução numérica de um estudo de caso

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,; \quad x \in (0,\pi)\ e\ t \in (0,1) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad ; \quad 0 < t < 1 \\ u(x,0) = \sin x \quad ; \quad 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

e comparar com a solução analítica $u(x,t) = \sin x \cos t$ a fim de mostrar a eficiência do método aplicado e do algoritmo implementado.

Materiais e métodos

Para obter a solução numérica do problema (2), utilizou-se o Método das Diferenças Finitas (MDF) centradas. O MDF consiste em discretizar o domínio da equação e construir aproximações para as derivadas que existem na equação (via série de Taylor), obtendo

$$(3)\left(x_i, t_j\right) = \frac{u(x_i,t_{j+1}) - \partial u(x_i,t_j) + u(x_i,t_{j-1})}{K^2}$$

e

$$(4)\left(x_i, t_j\right) = \frac{u(x_{i+1}t_j) - \partial u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{h^2}$$

Para discretizar o intervalo $[0,\pi]$ escolhe-se um número inteiro $m = 10$, de forma que $[0,\pi]$ seja dividido em 10 subintervalos. Os extremos destes subintervalos serão os pontos $x_i = ih$, para $i = 1,\cdots,10$, onde $h = 0{,}1\pi$. Analogamente, faz a discretização para $[0,1]$ no eixo t, escolhendo um número inteiro $N = 20$ para obter subintervalos de tamanho $k = 0{,}05$. Os extremos dos subintervalos no eixo t são dados por $t_j = jk$, para $j = 1,\cdots,20$.

Substituindo as equações (3) e (4) na equação (2), obtém-se

$$(5)\ \omega_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)\,\omega_{i,j} + \lambda^2\left(\omega_{i+1,j} + \omega_{i-1,j}\right) - \omega_{i,j-1}$$

De ordem $O(k^2 + h^2)$, para $j = 1,\cdots,h-1\ e\ i = 1,\cdots,m-1$.

A equação acima tem problema de partida, visto que para calcular $\omega_{i,2}$, conheço apenas $\omega_{i,o}$ e desconheço $\omega_{i,1}, \omega_{i+1,1}$ e $\omega_{i-1,1}$. Para resolver esta situação utilizamos a condição inicial, obtendo

$$\omega_{i,1} = (1-\lambda^2)f(x) + \frac{\lambda^2}{2}f(x_{i+1}) + \frac{\lambda^2}{2}f(x_{i-1}) + kg(x_i),$$

$$\text{para } i = 1,2,\cdots,m-1 \text{ e } \omega_{(i,j)} \approx u(x_i,t_j) \text{ e } \lambda = \frac{0,5}{\pi}.$$

O método de Diferenças Finitas Explícitas para a equação da onda tem problemas de estabilidade. De fato, é necessário que $\lambda = \frac{\alpha k}{h} \leq 1$ para o método ser estável, por isso escolha $m = 10$ e $N = 20$.

A equação (5) é conhecida como equação de diferenças. Ao atribuí valores para i e j, forma-se um sistema de equações que foi resolvido por um algoritmo implementado no *software MATLAB*, obtendo a solução numérica nos pontos discretizados.

Resultados e Discussão

Tabela 1 – Comparação entre as Soluções Analítica e Numérica

i	j	Xi	tj	Numérica	Analítica	Erro Percentual
0	10	0	0,5	0,0000000000	0,0000000000	0,10917874614
1	10	0,3142	0,5	0,2714840052	0,2711879256	0,10917874614
2	10	0,6283	0,5	0,5163932644	0,5158300875	0,10917874614
3	10	0,9425	0,5	0,7107543529	0,7099792065	0,10917874614
4	10	1,2566	0,5	0,8355418533	0,8346306141	0,10917874614
5	10	1,5708	0,5	0,8785406955	0,8775825619	0,10917874614
6	10	1,8850	0,5	0,8355418533	0,8346306141	0,10917874614
7	10	2,1991	0,5	0,7107543529	0,7099792065	0,10917874614
8	10	2,5133	0,5	0,5163932644	0,5158300875	0,10917874614
9	10	2,8274	0,5	0,2714840052	0,2711879256	0,10917874614
10	10	3,1416	0,5	0,0000000000	0,0000000000	0,10917874614

A Tabela 1 apresenta uma comparação entre a solução analítica e numérica nos pontos (x_i, t_j).

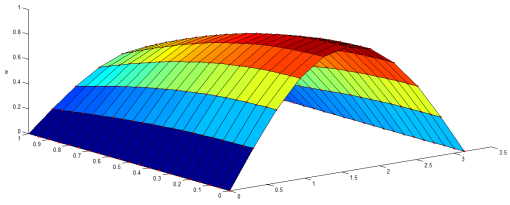

Figura 1 – Gráfico da Solução Numérica.

A Figura 1 apresenta a superfície obtida pela solução numérica.

Conclusões

O Método das Diferenças Finitas mostrou-se eficiente ao ser aplicado computacionalmente, pois aproxima a solução numérica da analítica, de acordo com o exposto na tabela.

Agradecimentos

Agradeço a Universidade Estadual de Maringá, Campus Maringá, pelo auxílio à Pesquisa.

Referências

BURDEN, R. L.; FAIRES, D. J.; **Analise Numérica**., 1ª Edição. São Paulo. Editora Thomson. 2003.

CHAPRA, S. C.: **Métodos Numéricos para Engenharia**. 5ª Edição. São Paulo - SP: McGraw-Hill. 2008.