XXV EAIC
VEAIC JR
13 a 14 de outubro de 2016
25º Encontro Anual de Iniciação Científica
5º Encontro Anual de Iniciação Científica Júnior

INTRODUÇÃO A OTIMIZAÇÃO NÃO-LINEAR

Faysall Santana Farhat (PIBIC/CNPq/FA/UEM), Emerson Vítor Castelani (Orientador), e-mail: evcastelani@uem.br. Wesley V. Shirabayashi (Co-orientador), e-mail: wvshirabayashi@uem.br

Universidade Estadual de Maringá/Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra/Matemática

Palavras-chave: minimização, restrições, penalidade

Resumo

O presente trabalho visa introduzir o leitor ao tema da otimização não linear, buscando encontrar pontos que satisfaçam as condições de minimização de uma função que apresenta restrições. O estudo se inicia com alguns conceitos básicos sobre otimização e apresenta, então, métodos que buscam a minimização de funções irrestritas. Em seguida, atinge-se o foco do projeto, abordando a minimização de funções com restrições de igualdade e apresentando o método da penalidade externa.

Introdução

A otimização é uma área de estudo que busca encontrar boas soluções (ou até mesmo a melhor delas) para um problema, seja este um problema que envolva custos, logística, produção e etc. Assim como grande parte do conhecimento matemático, a otimização abrange aplicações em praticamente todas as áreas do conhecimento, desde a própria matemática até as ciências biológicas. Um detalhamento de aplicações de métodos de otimização podem ser encontradas em LUENBERGER, 1998 e BAZARAA, 2010.

Nosso objetivo é apresentar métodos que atuem na busca por valores mínimos de funções de várias variáveis. Podemos generalizar o problema da otimização como sendo um problema do tipo:

$$\min f(x), \text{ s. a. } x \in S$$

onde $f: R^n \rightarrow R$ e S está contido no R^n. O subconjunto S nada mais é do que um conjunto de restrições que definem o domínio de f(x), sendo chamado de conjunto factível. Para exemplificar, podemos considerar dois casos:

a) $S = \{ x \in R^n \,/\, h(x) \geq 0\}$

b) $S = \{ x \in R^n \,/\, h(x) = 0\}$

O primeiro caso nos leva à minimização de funções com restrições de desigualdade. Já o segundo caso nos leva à minimização de funções com restrições de igualdade, sendo este o foco do presente trabalho:

$$\min f(x), \text{ s. a. } h(x) = 0$$

onde $h: R^n \rightarrow R^m$. É importante ressaltar que f é uma função contínua e possui derivadas contínuas até ordem 2, podendo ou não ser linear. Para o objetivo descrito, utilizaremos o método da penalidade externa, fazendo uma exposição do método e sua implementação em um exemplo.

Revisão de literatura

Normalmente, os problemas mais simples de se resolver em otimização são os problemas irrestritos, isto é, $S = R^n$. Tais problemas são desejáveis por possuírem condições de otimalidade mais simples de serem verificadas por métodos numéricos. Neste contexto, muitos algoritmos são propostos na literatura, podendo destacar os métodos de Busca Linear, Newton e métodos de Quase-Newton (BFGS, em particular). Recomendamos, para maiores detalhamentos destes métodos, FRIEDLANDER, 1994. Métodos Quase-Newton tem a vantagem de ter, em geral, convergência superlinear, porém as iterações não dependem do cálculo de derivadas de segunda ordem, o que é desejável na prática. De modo geral, a estrutura deste de método consiste em obter, num processo iterativo, direções de descida d tais que $B_k.d = -\nabla f(x_k)$ e a matriz B_k seja atualizada de forma a satisfazer a equação secante $B_k(x_{(k+1)} - x_k) = f(x_{(k+1)}) - f(x_k)$. Atualizações de B_k's diferentes satisfazendo a equação secante, geram métodos diferentes.

É importante destacar ainda que as iterações destes métodos são realizadas até que a condição (necessária) de otimalidade seja cumprida, o que no caso de primeira ordem consiste em obter um ponto x_k tal que $\nabla f(x_k) = 0$. Naturalmente, um ponto x_k nessas condições será um minimizador local. Contudo, há uma propriedade que garante que, ao satisfeita, um minimizador local será também, global. Essa propriedade é a convexidade.

de igualdade

O foco do presente projeto é a minimização de funções com restrições, em especial restrições de igualdade. Para este fim, é introduzido o método da penalidade externa (recomendamos MARTÍNEZ, 1995) sendo este responsável por transformar uma função restrita em irrestrita, procedendo, então, de forma similar à minimização irrestrita. A penalidade externa consiste em adicionar uma segunda função, P(x), multiplicada por um fator de penalidade ρ, à função original, eliminando a restrição.

Para tanto, escolhe-se uma função penalidade que esteja estritamente relacionada com a restrição da seguinte maneira:

$$P(x) = 0, \text{ se } h(x) = 0$$
$$P(x) > 0, \text{ se } h(x) \neq 0$$

Assim, tem-se uma parcela que aumenta o valor da função original, caso a restrição não seja satisfeita. Portanto, o problema inicial:

$$\min f(x), \text{ s. a. } h(x) = 0$$

se torna, após aplicada a penalidade externa:

$$\min f(x) + \rho P(x), \text{ s. a. } x \in R^n$$

onde ρ é um número real. Para que P(x) satisfaça corretamente as condições apresentadas, é comum escolhe-la como:

$$P(x) = (1/2)\, ||h(x)||^2$$

Assim, pode-se utilizar qualquer método de minimização irrestrita, agora em f(x) + ρP(x). O processo será o seguinte:

- Estipulamos inicialmente ρ = 1 e aplicamos um dos métodos irrestritos
- Atingindo um ponto x_n estacionário, verificamos se ele atende $h(x_n)$ = 0. Em caso positivo, temos um ponto factível e solução do problema.
- Em caso negativo, aumenta-se o valor de ρ, usualmente em um fator de 10, aplicando-se novamente o método irrestrito e assim por diante.

Resultados e Discussão

Como resultados de nossas pesquisas, implementamos um algoritmo para encontrar pontos que minimizem uma função restrita, baseando-nos nos métodos de BFGS e da penalidade externa.

Conclusões

O método da penalidade externa se comportou como o esperado na busca de pontos ótimos da função estudada, sendo de fácil implementação. Tais métodos são de grande valia na resolução de diversos tipos de problema da sociedade atual, envolvendo problemas econômicos, físicos e matemáticos. Alguns estudos são feitos para que sejam reduzidas condições e restrições, facilitando a aplicação dos métodos e melhorando seus resultados. Em exemplos estudados percebemos que, ao tomar um valor

para ρ grande já nas primeiras iterações reduz, consideravelmente, o número de iterações. Contudo, é observado na literatura clássica que este tipo de técnica pode ser pouco útil em situações mais complicadas, pois os subproblemas gerados podem ser numericamente instáveis. Desta forma, nosso estudo contempla apenas problemas de pequeno porte.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, ao meu orientador, Emerson Vítor Castelani, pela paciência com que me ajudou e aconselhou. Penso que é muito difícil encontrar pessoas de tamanha compreensão.

Agradeço aos meus pais e irmãos pelo apoio incondicional e pela ajuda nos momentos de dúvida, bem como pela presença constante em todas as horas, sejam boas ou adversas.

Agradeço, também, à UEM pelo suporte acadêmico e incentivo financeiro para concluir este projeto.

Referências

FRIEDLANDER, A., **Elementos de programação não-linear** (1ª Edição), Editora da Unicamp, 1994.

MARTÍNEZ, J. M., SANTOS, S. A., **Métodos computacionais de otimização** (1ª Edição), IMPA, 1995.

LUENBERGER, D. G., **Investment Science** (1ª Edição), Oxford University Press, 1998.

BAZARAA, M. S., JARVIS, J. J., SHERALI, H. D., **Linear Programing and Network Flows** (4ª Edição), Wiley, 2010.