A INTEGRAL DE LEBESGUE

Raul Alexandre Diniz (PIBIC/FA-UEM), Prof. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria (Orientadora); e-mail: jcofaria@uem.br

Universidade Estadual de Maringá/ Departamento de Matemática/ Maringá, PR

Ciências Exatas e da Terra- Matemática.

Palavras-chave: Análise, Integral de Lebesgue, Teorema de Lebesgue.

Resumo:

Este projeto tem como objetivo o estudo de tópicos da Análise, mais especificamente no âmbito da integrabilidade de funções, com o objetivo de construir as condições para se demonstrar o Teorema de Lebesgue. Foram revistos os conceitos de conjuntos, espaços métricos, continuidade e integrabilidade, e estudados os conceitos de Integral de Riemann, espaço de medida e Integral de Lebesgue, bem como as propriedades relacionadas a estes temas sob o ponto de vista da Análise, não se esquecendo do rigor matemático. Como aplicação dos conceitos e das propriedades citadas, apresentaremos a demonstração do Teorema de Lebesgue e exemplos particulares referentes a este teorema.

Introdução

O conceito de função teve sua origem a partir dos filósofos da Grécia antiga, que buscavam encontrar métodos que permitissem estudar e descrever os fenômenos naturais. Porém levou-se muito tempo para que este conceito fosse aperfeiçoado, e só no século XVIII se pôde trabalhar efetivamente com ele. Já a integral de uma função veio do problema de determinar a área sob uma curva no plano. Arquimedes foi um dos primeiros a estudar as áreas sobre figuras mais abstratas, porém foi Newton que desenvolveu o Cálculo e assim, as Integrais. Para Newton, a integração já viria a ser o inverso da derivação.

As primeiras noções de integrabilidade de funções são apresentadas em um primeiro curso de Cálculo Diferencial e Integral, através da Integral de Riemann. Além disso, durante os primeiros anos de formação acadêmica, o estudante de Matemática aprende que as noções de áreas e volumes estão relacionadas ao conceito de integral. Neste sentido, o estudo de elementos de teoria da medida é indispensável para a sólida formação de um acadêmico em Matemática, em especial para a compreensão de elementos de Análise Funcional e aplicações em estágios avançados de conhecimento. Assim, este projeto de pesquisa propôs-se ao estudo das primeiras noções pertinentes à teoria da medida, a partir do estudo da integral de Lebesgue, seguindo a construção idealizada por F. Riesz, a qual tende a ser mais simples que a construção originalmente proposta por Lebesgue.

Desta forma, este projeto propõe uma introdução ao estudo de uma teoria de integração mais geral que venha abranger resultados obtidos através da Integral de Riemann, e corrigir a ineficácia desta integral na resolução de alguns problemas relevates do ponto de vista da Análise Funcional.

Materiais e métodos

Este trabalho foi desenvolvido através de estudos individuais dos tópicos apresentados, e encontros semanais para apresentação de seminários. Como base para esses estudos utilizamos os textos de Medeiros e Mello (2008), e Lima (1977).

Resultados e Discussão

Ao longo do desenvolvimento desse projeto foram estudados conceitos como os de Conjuntos, Espaços Métricos, Limites, Sequências e Integrais. Estudamos, também, o conceito de integral com foco em suas propriedades e aplicações, expondo e trabalhando alguns teoremas importantes do Cálculo Diferencial e Integral, buscando alcançar o principal resultado desta pesquisa, o Teorema de Lebesgue. Mais especificamente, definimos e trabalhamos com os conceitos de amplitude, conjuntos de medida nula, Integral de Riemann e função escada. Desta forma, demonstramos os denominados Primeiro e Segundo Lema Fundamental, os quais nos permitiram definir a Integral de Lebesgue, e posteriormente demonstrar o Teorema de Lebesgue, que é um resultado importante do ponto de vista da Teoria da Medida. Tal teorema é enunciado como segue:

Teorema: Seja *(u_n)* uma sucessão de funções integráveis em *(a,b)*, convergente quase sempre para a função *u*. Se existir uma função integrável u_0 tal que $|u_n| \leq u_0$ quase sempre para todo *n* natural, então *u* é integrável e tem-se que

$$\int u = \lim_{n\to\infty} \int u_n.$$

Por fim, através do estudo da Integral de Lebesgue podemos melhor compreender e dar exemplos de funções interessantes do ponto de vista da Análise que não são integráveis a Riemann, mas que são integráveis a Lebesgue.

Conclusões

O objetivo deste projeto de Iniciação Científica é que se torne mais fácil a visualização e a construção da Integral de Lebesgue e dos conceitos aqui estudados, para que assim o leitor esteja mais preparado para uma consulta em textos mais específicos da Analise ou de outras áreas correlatas da matemática.

Agradecimentos

Agradeço a minha família e amigos pelo apoio por todo esse tempo, em especial ao Departamento de Matemática UEM. Agradeço a Universidade Estadual de Maringá pelo apoio e estrutura e um agradecimento especial a UEM e Fundação Araucária pelo apoio financeiro. Muito obrigado a todos.

Referências

LIMA, E. L. **Espaços métricos**. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1977.

MEDEIROS, L. A. / MELLO, E. A. **A Integral de Lebesgue**. Rio de Janeiro: UFRJ, IM, 2008.