ISOMETRIAS NO PLANO E GRUPOS DE SIMETRIA

Natália Alcazar de Matos (PIBIC/CNPq/FA/UEM), Patricia Hernandes Baptistelli (Orientadora), e-mail: phbaptistelli@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas, PR.

Área e subárea do conhecimento: Matemática/Geometria e Topologia.

Palavras-chave: isometria, grupos de simetria, ornamentos.

Resumo:

Neste projeto, estudamos os resultados básicos das isometrias no plano sob um contexto algébrico, utilizando ferramentas da álgebra linear e da geometria analítica. Verificamos que toda isometria no plano é ou uma translação, ou uma rotação, ou uma reflexão ou uma reflexão com deslizamento. A partir disso, usamos as isometrias na construção e na classificação dos ornamentos do plano.

Introdução

As simetrias podem ser notadas constantemente na natureza ou em construções feitas pelo homem. Na geometria, elas são definidas em termos das isometrias, que são transformações geométricas que mantêm fixa a distância entre dois pontos quaisquer.
No decorrer da história as simetrias foram utilizadas pelo homem como elementos decorativos e, com o passar do tempo, essas figuras decorativas tornaram-se cada vez mais complexas, surgindo então os ornamentos no plano, com repetições de uma mesma figura geométrica, tais como as rosetas, os frisos e os papéis de parede.
Em nosso projeto, estudamos e classificamos o conjunto das isometrias do plano, que munido da operação de composição de funções possui estrutura de grupo. Com os resultados obtidos classificamos, num contexto algébrico, os ornamentos do plano. As duas principais referências no desenvolvimento deste trabalho foram (GERÔNIMO e FRANCO, livro em preparação) e (BACALHAU, 2012).

Materiais e métodos

Por se tratar de um projeto de pesquisa básica, a metodologia empregada consiste de pesquisas bibliográficas, estudo do material coletado, apresentação de seminários e discussão do tema abordado.

Resultados e Discussão

Um dos mais importantes resultados de nosso trabalho é o teorema que nos permite classificar os tipos de ornamentos do plano. A seguir, apresentamos os principais conceitos e resultados referentes a ele. Chamamos de M o conjunto de todas as isometrias I: $R^2 \to R^2$, a saber, as translações, as rotações, as reflexões e as reflexões com deslizamento.

Definição 1. Denominamos por figura geométrica plana, ou somente figura, um subconjunto F do plano. Chamamos de simetrias da figura F as isometrias que possuam a propriedade I(F) = F.

Definição 2. Dada uma figura geométrica plana F, o grupo formado por todas as simetrias de F é denotado por Γ_F. Se a identidade não for a única simetria de F dizemos que F é uma figura simétrica. Caso contrário, dizemos que F é uma figura assimétrica.

Como mencionamos, por meio dos grupos de simetrias podemos classificar os ornamentos. A seguir, apresentamos o conceito formal de ornamento.

Definição 3. Um ornamento é uma figura simétrica F cujo grupo de simetrias Γ_F é discreto. O grupo ornamental é o grupo Γ_F de um ornamento.

Lembramos que um conjunto C é discreto quando não possui pontos de acumulação, ou seja, todo ponto de C tem uma vizinhança que não contém pontos do conjunto.

Definição 4. Seja F um ornamento e Γ_F seu grupo ornamental. O grupo translacional de Γ_F é o subgrupo $T_F = T \cap \Gamma_F$, onde T denota todas as translações de F.

É possível provar que T_F é um subgrupo normal de Γ_F e discreto. Além disso, podemos naturalmente identificar T_F com vetores de R^2 da seguinte forma:

$$A_F = \{T_u(0,0),\ T_u \in T_F\}.$$

Como T_F é discreto, concluímos que A_F também é um subconjunto discreto de R^2. O próximo resultado nos mostra as 3 possibilidades para A_F:

Proposição 5. Todo subgrupo discreto D de R^2 tem uma das seguintes formas:

a) $D = \{(0,0)\}$.

b) Existe $u \in R^2$ não nulo tal que $D = \{m.u;\ m \in \mathbb{Z}\}$.

c) Existem $u, v \in R^2$ linearmente independentes tais que

$$D = \{m.u + n.v;\ m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Podemos agora apresentar uma classificação para os ornamentos do plano. Caracterizamos abaixo os três tipos de grupos ornamentais por meio do grupo translacional A_F:

Teorema 6: Seja Γ_F o grupo ornamental de uma figura F e A_F o seu grupo translacional. Então, Γ_F é do tipo:

(1) Roseta, quando $A_F = \{(0,0)\}$.

(2) Friso ou Fita, quando $A_F = \{m.u;\ m \in \mathbb{Z} \text{ e } u \in R^2\}$.

(3) Papel de Parede, quando $A_F = \{m.u + n.v;\ m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } u, v \in R^2\}$.

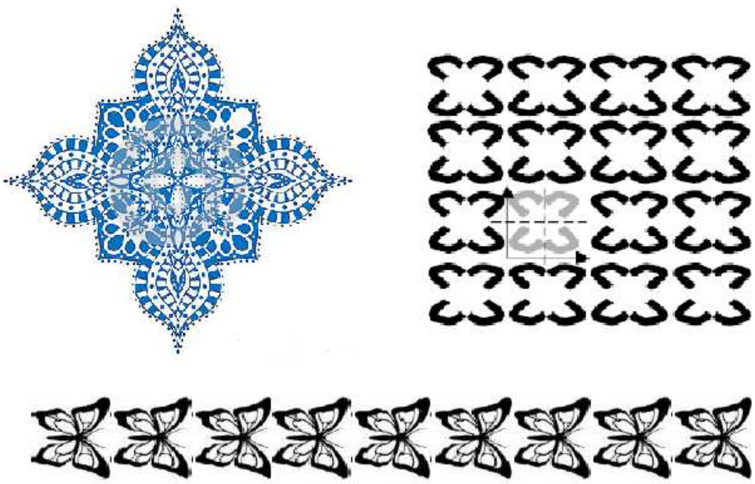

Figura 1 – Os três tipos de ornamentos do plano.

Conclusões

As simetrias e os ornamentos do plano estão constantemente presentes em nosso cotidiano. Poder descrevê-los e estudá-los por meio de ferramentas matemáticas é algo sobremodo interessante, tanto do ponto de vista algébrico quanto geométrico, já que é possível aproveitar a riqueza do apelo geométrico das figuras. Além disso, os grupos ornamentais descrevem de forma sistemática todos os possíveis padrões simétricos que se repetem no plano.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por me capacitar a cada novo projeto, a minha família, a minha orientadora e ao CNPq.

Referências

Bacalhau, F. M. **Isometrias do plano e simetria**. 2012. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade de Lisboa, Lisboa. 2012.

Gerônimo, J. R. e Franco, V. S. **Simetrias e ornamentos no plano**, (livro em preparação).