ANÁLISE FUNCIONAL: UMA ABORDAGEM CLÁSSICA

Izabella Durante Temporini Furtado (PIBIC/CNPq/Uem), Valéria Neves Domingos Cavalcanti (Orientador), e-mail: vndcavalcanti@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas / Maringá, PR.

Área e subárea do conhecimento: Matemática / Probabilidade e Estatística – Análise.

Palavras-chave: Teorema de Hahn-Banach,funcional positivamente homogêneo e subaditivo, funcional de Minkowski

Resumo:

O projeto em tela permitiu um primeiro contato com uma coletânea de resultados centrais e fundamentais da Análise Funcional, presentes em textos clássicos como Bachman, G., Narici, L (1972) e Brézis,H (1999) e expostos de forma didática em Cavalcanti,M. M., Domingos Cavalcanti, V. N., Komornik, V. (2011). Apresentamos um resultado muito importante que tem grande aplicabilidade, conhecido como Teorema de Hanh-Banach, o qual sera visto de duas maneiras: na sua forma análitica e na sua forma geométrica. Daremos um enfoque especial na forma geométrica.

Introdução

A grande relevância da Matemática reside no fato de que, além de existir como ciência, com suas teorias e problemas; ela tem a característica ímpar de penetrar em outros ramos do conhecimento humano. As raízes de várias teorias matemáticas estão em fenômenos naturais que impulsionaram o notável crescimento de grande parte da Matemática. As Equações Diferenciais fazem parte desta Matemática comprometida com o estudo de problemas concretos.

Materiais e métodos

Foram realizados estudos individuais com apresentações de seminários, propiciando discussões acerca do conteúdo presente nas obras apresentadas na referência bibliográfica.

Resultados e Discussão

De modo a demonstrar o Teorema de Hahn-Banach nas suas duas formas, são necessários alguns resultados e definições os quais foram extraidos de Cavalcanti,M. M., Domingos Cavalcanti, V. N., Komornik, V. (2011). :

Definição 01: Seja E um espaço vetorial, G um subespaço de E e g uma forma linear de G, isto é , $g \in G^*$. Dizemos que uma forma linear h é um prolongamento de g se $h(x) = g(x)$, para todo $x \in G$.

Lema 02: Sejam E um espaço vetorial e $p : E \to R$ uma aplicação tal que

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall x \in E, \lambda > 0$$
$$p(x + y) \le p(x) + p(y), \forall x, y \in E,$$

Isto é, p é um funcional positivamente homogêneo e subaditivo em E.

Sejam G um subespaço próprio de E e $g \in G^*$ tal que $g(x) \le p(x)$, para todo $x \in G$. Então existe um prolongamento próprio h, de g, verificando $h(x) \le p(x), \forall x \in D(h)$.

Assim, estamos aptos a enunciar o Teorema de Hahn-Banach na sua forma Analítica:

Teorema 03: **(Teorema de Hahn-Banach – Forma Analítica):** Sejam E um espaço vetorial e p um funcional positivamente subaditivo, definido em E. Se G é um subespaço próprio de E, $g \in G^*$ e $g(x) \le p(x), \forall x \in G$, então existe um prolongamento h de g a E tal que $h(x) \le p(x), \forall x \in E$.

Para enunciarmos a Forma Geométrica é necessário :

Definição 04: Dizemos que um conjunto C é convexo se

$$[tx + (1-t)y] \in C, \forall x, y \in C \text{ e } t \in [0,1]$$

Definição 05: Seja E um espaço vetorial normado, $C \subset E$ um conjunto aberto e convexo tal que $0 \in C$. Para cada $x \in E$, definimos

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0; \frac{x}{\alpha} \in C\}$$

O funcional $p : E \to R$ é denominado funcional de Minkowski para o convexo C.

Definição 06: Seja E um espaço vetorial real. Um hiperplano afim de E é um conjunto da forma

$$H = \{x \in E;\ f(x) = \alpha\}$$

onde $\alpha \in R$ e $f \in E^*$ tal que $f \neq 0$ (ou seja f não é identicamente nula). Dizemos que H é um hiperplano de equação $[f = \alpha]$.

Proposição 07: O hiperplano H de equação $[f = \alpha]$ é fechado se, e somente se, f é contínua.

Definição 08: Seja E um espaço vetorial normado e consideremos $A, B \subset E$. Dizemos que o hiperplano H de equação $[f = \alpha]$ separa A e B no sentido lato (generalizado) se

$$f(x) \le \alpha, \forall x \in A \text{ e } f(y) \ge \alpha, \forall y \in B.$$

Dizemos que o hiperplano H separa A e B no sentido estrito se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) \le \alpha - \varepsilon, \forall x \in A \text{ e } f(y) \ge \alpha + \varepsilon, \forall y \in B.$$

Com isso podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 09: **(1º Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach)** Sejam E um espaço vetorial normado e $A, B \subset E$ subconjuntos convexos, disjuntos e não vazios. Se A é aberto, então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido lato.

Temos ainda :

Teorema 10**: (2º Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach)** Sejam E um espaço vetorial normado, $A, B \subset E$ subconjuntos convexos, disjuntos e

não vazios. Se A for fechado e B for compacto, então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido estrito.

Como consequência do Teorema acima, temos o seguinte corolário:

Corolário 11: Sejam E um espaço vetorial e F um subespaço de E tal que $\overline{F} \neq E$ **.** Então existe $f \in E'$, $f \neq 0$ (não identicamente nula) tal que $< f, x >= 0, \forall x \in F$.

O corolário em questão é de grande pertinência pois ele permite demonstrar quando um subespaço vetorial $F \subset E$ é denso em E.

Conclusões

A demonstração e, consequente compreensão das formas do Teorema apresentado, requer um grande embasamento teórico, desenvolvido ao longo do projeto. Os conceitos necessários não são triviais, embora amplamente utilizados. O Teorema de Hahn-Banach possui importância por si só, porém ressaltamos que na sua 2º Forma Geométrica há um corolário que ilustra sua aplicabilidade e cujo resultado é relevante em vários ramos da Matemática.

Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte financeiro concedido pelo CNPq, sem o qual este projeto não se realizaria.

Referências

BACHMAN, G. ; NARICI, L. **Functional Analysis**. New York, 1972.

BRÉZIS, H. **Analyse Fonctionnelle-Thèorie et applications.** Paris, Dunod,1999.

CAVALVANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. ; KOMORNIK, V. **Introdução à Análise Funcional.** Maringá, Eduem, 2011.