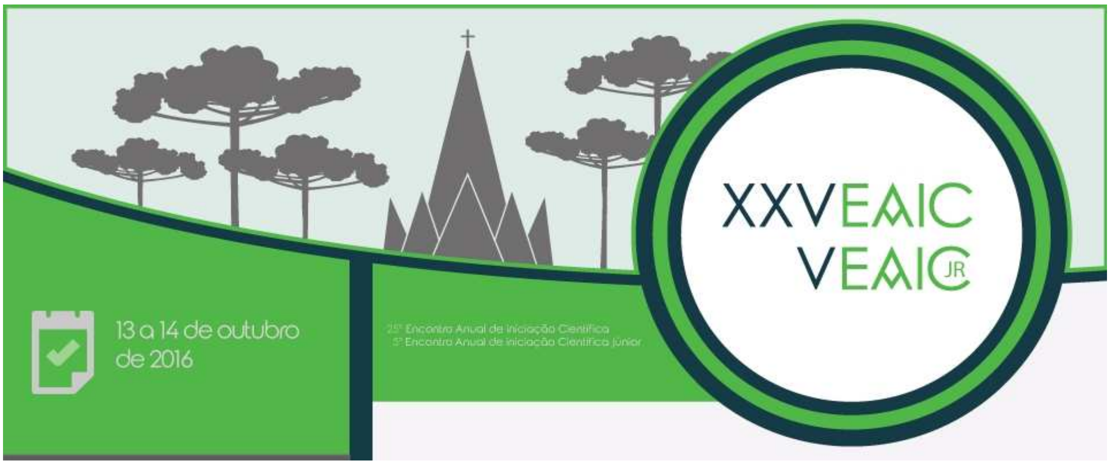

DOMÍNIOS FATORIAIS, EUCLIDIANOS E DE IDEAIS PRINCIPAIS E APLICAÇÕES EM ANÉIS DE POLINÔMIOS

Juliana Camile do Nascimento (PIBIC/FA/UEM), Laerte Bemm (Orientador), e-mail: laertebemm1983@yahoo.com.br.

Universidade Estadual de Maringá/Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Área: Matemática.

Subárea: Álgebra.

Palavras-chave: anéis, corpos, domínios de integridade.

Resumo:

O anel de polinômios em uma indeterminada sobre um anel *R* pode ser visto como um anel que contém *R*. Deste modo, visamos investigar algumas propriedades do anel de polinômios a partir das propriedades do anel base.

Introdução

A aritmética do conjunto formado pelos polinômios em uma *indeterminada x* com coeficientes reais é estudada na escola básica. Vê-se, por exemplo, como somar, subtrair, multiplicar e dividir polinômios. A pergunta é: o que acontece se consideramos polinômios com coeficientes em um anel qualquer? Será que podemos somar, subtrair, multiplicar e dividir polinômios? Se sim, quais são as propriedades destas operações? Neste trabalho, estudaremos algumas propriedades algébricas do anel de polinômios *R[x]*, onde *R* é um anel, que são herdadas do anel base. Por exemplo, veremos que se *R* é comutativo (domínio) então *R[x]* também será comutativo (domínio). Veremos que, se *F* é um corpo, então existe um algoritmo que nos permite dividir um polinômio por outro, obtendo um quociente e um resto. Tal resultado permitirá concluir, entre outras coisas, que *F[x]* é um anel onde todo ideal é principal, isto é, gerado por um único elemento.

Materiais e métodos

FUNDAÇÃO ARAUCÁRIA CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico PARANÁ GOVERNO DO ESTADO Secretaria da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

O projeto foi desenvolvido por meio de pesquisas bibliográficas e apresentações de seminários semanais ao orientador a fim de expor os resultados estudados e de esclarecer possíveis dúvidas.

Resultados e Discussão

Apresentamos abaixo os principais resultados estudados sobre os quais falaremos na apresentação. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências listadas ao final deste resumo.

Definição 01: Um anel é um conjunto não vazio *R* munido de duas operações binárias + e ·, denominadas adição e multiplicação, respectivamente, tal que: *(R,+)* é um grupo comutativo aditivo; *(R,·)* é um semigrupo multiplicativo; e a multiplicação é distributiva em relação à adição.

Claramente, os conjuntos dos números inteiros, racionais, reais e complexos são exemplos de anéis com as operações usuais.

Exemplo 02: Seja *R* um anel. Um polinômio com coeficientes em *R* é uma expressão formal da forma $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ onde cada a_i é um elemento de *R*. Dois polinômios podem ser somados e multiplicados da maneira usual. Deste modo, o conjunto *R[x]* de todos os polinômios com coeficientes em *R*, forma um anel, denominado anel de polinômios sobre *R*.

Quando a operação de multiplicação de um anel também é comutativa, dizemos que *R* é um *anel comutativo*. Se a multiplicação admite um elemento identidade, *R* é dito um *anel com identidade*. Neste caso, a identidade de *R* será denotada por 1_R. Um *corpo* é um anel comutativo com identidade cujos elementos não nulos formam um grupo com a operação de multiplicação. Um *domínio de integridade* é um anel *R* no qual o produto de quaisquer dois elementos não nulos é um elemento não nulo. Um domínio de integridade comutativo será denominado simplesmente por *domínio*. Um *domínio de ideais principais* é um domínio cujos ideais são todos principais, isto é, gerados por um único elemento.

Note que todo corpo é um domínio. Porém, a recíproca não é necessariamente verdadeira. Por exemplo, o conjunto dos números inteiros

Z é um domínio, mas não é um corpo. Mais ainda, observe que *Z* é um domínio de ideais principais.

Um elemento *u* de um anel com identidade *R* é dito ser *invertível*, ou uma *unidade* de *R* se existe *v* em *R* tal que $uv=1_R=vu$. Em *Z,* por exemplo, apenas 1 e -1 são invertíveis.

Dois elementos *a* e *b* de um domínio *R* com identidade são ditos *associados* se existe uma unidade *u* de *R* tal que $a=bu$.

Um elemento não nulo *a* de um domínio de integridade com identidade *R* é denominado um elemento *irredutível* se: *(i)* *a* não é uma unidade; *(ii)* para quaisquer *b* e *c* de *R*, se $a=bc$, então *b* ou *c* é uma unidade.

Definição 03: Um domínio de fatoração única *D* é um domínio cujos elementos não nulos e não invertíveis podem ser escritos de modo único, a menos da ordem e de associados, como o produto de elementos irredutíveis de *D*.

Definição 04: Um domínio euclidiano é um domínio *E* com uma função *N* (denominada norma) definida nos elementos não nulos de *E* com valores naturais que satisfaz:
(i) para quaisquer elementos não nulos *a* e *b* de *E*, $N(a)\leq N(ab)$;
(ii) para quaisquer elementos *a* e *b* de *E*, com *b* não nulo, existem elementos *q* e *r* em *E* tais que $a=bq+r$, com $r=0$ ou $N(r)<N(b)$.

O item *(ii)* da definição anterior é chamado de *algoritmo da divisão*.

Das definições acima, obtemos os seguintes resultados.

Teorema 05: Todo domínio euclidiano é um domínio de ideais principais.

Teorema 06: Todo domínio de ideais principais é um domínio de fatoração única. Em particular, todo domínio euclidiano é um domínio de fatoração única.

Por fim, enunciamos os principais resultados do nosso trabalho.

Teorema 07: Se *F* é corpo, então *F[x]* é um domínio euclidiano. Em particular, *F[x]* é um domínio de ideias principais.

Teorema 08: Se *R* é um domínio de fatoração única, então *R[x]* também é.

Conclusões

Ao final do nosso estudo, verificamos que o anel de polinômios com coeficientes em um corpo, tem propriedades semelhantes àquelas dos números inteiros.

Agradecimentos

Agradeço à Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

Referências

BERGO, C., FUJITA, B., RAMADA L., SCHWARZ, J. YUKIHIDE, F. **Sobre Domínios Euclidianos**. Unicamp, 2011. P 2-3. Disponível em: < http://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/Felipe_M1_AC_2011.pdf>. Acesso em: 31 maio 2016.

BHATTACHARYA, P. B., JAIN, S. K., NAGPAUL, S. R. **Basic Abstract Algebra**. 2nd. edt. Cambridge: University Press, 1994.

MACHIAVELO, A. **Notas de Álgebra II**. FCUP, 1997/98. P 19. Disponível em: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/ajmachia/>. Acesso em: 07 jun. 2016.

MONTEIRO, L. H. J. **Elementos de Álgebra**. IMPA/Ao Livro Técnico, 1969.

PICADO, J. **Álgebra comutativa**. Universidade de Coimbra, 2013. P 5-8. Disponível em: < http://www.mat.uc.pt/~picado/algcom/apontamentos/TextosApoio.pdf>. Acesso em: 10 maio 2016.