A TOPOLOGIA MÉTRICA

Matheus Henrique do Prado Zaniboni (PIBIC/CNPq/Uem), Marcelo Moreira Cavalcanti (Orientador), e-mail: mmcavalcanti@uem.br, Claudete Matilde Webler Martins (Co-Orientadora), e-mail: cmwebler@uem.br

Universidade Estadual de Maringá/Centro de Ciências Exatas e da Terra/ Maringá, PR.

Área/ **Subárea:** Matemática/ Análise.

Palavras-chave: topologia, conjuntos abertos, espaços métricos.

Resumo:

Queremos apresentar a topologia dos espaços métricos, isto é, vamos partir de um espaço métrico qualquer e buscar uma maneira de definir uma topologia sobre este espaço.

Introdução

Para compreender a topologia dos espaços métricos, apresentaremos primeiramente a definição geral de topologia, logo após, definiremos espaços métricos, bolas abertas e conjuntos abertos nesses espaços. Para concluir, mostraremos que qualquer métrica define, de maneira natural, uma topologia num espaço métrico.

Materiais e métodos

Foram realizadas pesquisas bibliográficas, estudo e discussão teórica do tema abordado.

Resultados e Discussão

Apresentamos abaixo os principais resultados estudados sobre os quais falaremos na apresentação, que podem ser encontrados em (LIMA, 1977).

Definição 01: Seja T uma coleção de subconjuntos de um dado conjunto X. Então diremos que T é uma topologia sobre X, se as seguintes condições forem satisfeitas:
(1) O conjunto vazio e o conjunto X são elementos de T;
(2) A interseção de um número finito de elementos de T é ainda um elemento de T;
(3) A reunião de uma família qualquer de elementos de T é ainda um elemento de T.
Os elementos de uma topologia são chamados de abertos da topologia.

Definição 02: Um espaço métrico é um par (M, d), onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica sobre M, que é uma função definida em M x M satisfazendo, para quaisquer x, y em M, as seguintes condições:
(D1) $d(x, x) = 0$;
(D2) Se x é diferente de y então $d(x, y) > 0$;
(D3) $d(x, y) = d(y, x)$;
(D4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definição 03: Seja a um elemento de um espaço métrico (M, d). Dado um número real $r > 0$, a bola aberta de centro a e raio r, denotado por B(a; r), é o conjunto dos elementos de M cuja distância ao elemento a é menor do que r, ou seja, B(a; r) = { x é elemento de M; $d(x, a) < r$ }.

Definição 04: Seja A um subconjunto de um espaço métrico (M, d). Então A é chamado de conjunto aberto de M quando dado qualquer elemento x de A, pudermos encontrar um número real $r > 0$ (r depende de x), de modo que B(x; r) seja um subconjunto de A.

Conclusões

Como consequência destes resultados temos a seguinte proposição que permitirá definirmos uma topologia sobre qualquer espaço métrico. Neste caso, os elementos desta topologia serão os conjuntos abertos do espaço métrico. Aqui, apenas, enunciaremos a proposição.

Proposição 01: Seja (M, d) um espaço métrico. Então:
(1) O conjunto vazio e o espaço métrico M são conjuntos abertos de M;

(2) A interseção de um número finito de conjuntos abertos de M é ainda um conjunto aberto de M;
(3) A reunião de uma família qualquer de conjuntos abertos de M é ainda um conjunto aberto de M.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Referências

LIMA, E. L. **Espaços métricos.** Rio de Janeiro: Impa, 1977.