AUTOMORFISMOS DE ÁLGEBRAS DE INCIDÊNCIA

Roger Emanuel Moraes Pezzott (PIBIC/CNPq/Uem), Érica Zancanella Fornaroli (Orientadora), e-mail: ezancanella@uem.br

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas / Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra / Matemática

Palavras-chave: poset localmente finito, álgebra de incidência, automorfismo.

Resumo:

Este trabalho teve como pré-requisito um estudo sobre conjuntos parcialmente ordenados e sobre resultados básicos da teoria de anéis, com o objetivo de introduzir as álgebras de incidência para enfim estudar seus automorfismos.

Introdução

A álgebra de incidência de um conjunto parcialmente ordenado (poset) localmente X finito sobre um anel comutativo R, denotada por $I(X,R)$, surgiu por volta de 1960 com Doubilet, Rota e Stanley em (ROTA; DOUBILET; STANLEY,1964), como uma ferramenta para estudar problemas combinatórios. Rapidamente, passou a ser vista pelos algebristas como um interessante objeto de estudo, uma vez que tais álgebras podem ser vistas como uma generalização das álgebras de matrizes triangulares superiores sobre R.

No estudo de uma álgebra, um dos principais interesses é descrever os seus automorfismos. No caso em que o anel R é um corpo, os automorfismos de $I(X,R)$ estão fortemente relacionados com os automorfismos do poset X. Além disso, existem três tipos de automorfismos de $I(X,R)$ que caracterizam todos os seus automorfismos: os automorfismos internos, os multiplicativos e os automorfismos induzidos por automorfismos de X.

Materiais e métodos

Para a realização deste trabalho foram realizadas pesquisas bibliográficas, estudos e discussões com a finalidade de compreender e transmitir com clareza os conhecimentos adquiridos. As principais fontes de estudo foram (SPIEGELL; O'DONNELL, 1997) e (SCRÖDER, 2002).

Resultados e Discussão

Um conjunto X é dito um conjunto parcialmente ordenado (poset) se X é munido de uma relação de ordem parcial, isto é, se possui uma relação $\leq$ que é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Usualmente, denota-se um poset X por $(X, \leq)$ ou simplesmente por X. Se x e z são elementos de X, o intervalo de x a z é o conjunto dos elementos y de X tal que $x \leq y \leq z$ e, no caso em que todos os intervalos de X são finitos, dizemos que X é um poset localmente finito. Sejam $(X, \leq_x)$ e $(Y, \leq_y)$ posets e seja $f: X \rightarrow Y$ uma função bijetora tal que $x_1 \leq_x x_2$ se, e somente se, $f(x_1) \leq_y f(x_2)$, para todos x_1 e x_2 de X. Dizemos que f é um isomorfismo de posets. No caso em que $X=Y$, dizemos que f é um automorfismo de X.

Um anel R é um conjunto não vazio com duas operações binárias chamadas adição e multiplicação tal que a adição é associativa e comutativa, possui elemento neutro e todo elemento de R é simetrizável, e a multiplicação é associativa, distributiva relativamente à adição e possui um elemento neutro. Se, além disso, a multiplicação for comutativa, R é dito um anel comutativo. Dizemos que R é um corpo se for um anel comutativo tal que todos seus elementos possuem inversos multiplicativos. Sejam R e S anéis. Um homomorfismo de R e S é uma função $g: R \rightarrow S$ tal que $g(1_R) = 1_S$, $g(a+b) = g(a) + g(b)$ e $g(ab) = g(a)g(b)$. Se, além disso, g for bijetora dizemos que g é um isomorfismo de anéis. No caso em que $R = S$ e g for uma bijeção dizemos que g é um automorfismo.

Seja K um anel comutativo. Um anel R junto com uma função $K \times R \rightarrow R$ dada por $(k,a) \rightarrow ka$ tal que $(s+k)a = sa + ka$, $k(a+b) = ka + kb$, $(ks)a = k(sa)$, $1_K a = a$ e $k(ab) = (ka)b = a(kb)$, para todos a e b em R e para todos s e k em K é dito uma K-álgebra. Dadas duas K-álgebras A e B, uma função $f: A \rightarrow B$ é um homomorfismo de K-álgebras se f for um homomorfismo de anéis K-linear, ou seja, $f(ka) = kf(a)$, para todos k em K e a em A. Quando f for bijetora dizemos que f é um isomorfismo de K-álgebras. E, além disso, se f

for isomorfismo de uma K-álgebra A sobre ela mesma, diremos que f é um automorfismo de A.
A álgebra de incidência $I(X,R)$ de um poset X localmente finito sobre um anel comutativo R é o conjunto das funções $f: X \times X \rightarrow R$ tais que $f(x,y) = 0$ se x não é menor ou igual a y com as seguintes operações: $(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$, $(gf)(x,y) = \sum_{x\leq z\leq y} g(x,z)f(z,y)$ e $(rf)(x,y) = rf(x,y)$, para todos f e g em $I(X,R)$, r em R e x, y e z em X. Com essas operações $I(X,R)$ é uma R-álgebra onde a unidade de $I(X,R)$ é a função característica de X.
Sejam X e Y posets e seja F um corpo. Se $I(X,F)$ e $I(Y,F)$ são isomorfas como F-álgebras então X e Y são isomorfos como posets. Reciprocamente, se X e Y são isomorfos como posets podemos induzir um isomorfismo de F-álgebras entre $I(X,F)$ e $I(Y,F)$.
Seja X um poset localmente finito e seja F um corpo. Uma função σ de $I(X,F)$ é dita multiplicativa se sempre que $x \leq z \leq y$ são elementos de X, então $\sigma(x,y) \neq 0$ e $\sigma(x,y) = \sigma(x,z)\sigma(z,y)$. Dadas f e g funções de $I(X,F)$, o produto de Hadamard de f por g, denotado por $f * g$, é dado por $(f * g)(x,y) = f(x,y)g(x,y)$, para todos x e y em X. Se σ é uma função multiplicativa, então a aplicação $M_\sigma: I(X,F) \rightarrow I(X,F)$, dada por $M_\sigma(f) = \sigma * f$, é um automorfismo de $I(X,F)$ chamado automorfismo multiplicativo. Seja f uma função invertível de $I(X,F)$. A aplicação $\psi_f : I(X,F) \rightarrow I(X,F)$ dada por $\psi_f(g) = f\, g\, f^{-1}$ é um automorfismo de $I(X,F)$ chamado automorfismo interno. Considere agora α um automorfismo de X. Então α induz um automorfismo φ_α de $I(X,F)$, dado por $(\varphi_\alpha(f))(x,y) = f(\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y))$. Todo automorfismo de $I(X,F)$ pode ser escrito como a composição de um automorfismo interno, um automorfismo multiplicativo e um automorfismo de $I(X,F)$ induzido por um automorfismo de X.

Conclusões

Em geral, descrever todos os automorfismos de uma álgebra nem sempre é possível. No entanto, isso pode ser feito com as álgebras de incidência sobre um corpo: todo automorfismo desta pode ser escrito como composição de um automorfismo interno, com um automorfismo multiplicativo e um automorfismo induzido por um automorfismo do poset.

Agradecimentos

A minha orientadora e ao CNPq.

Referências

ROTA, G-C, DOUBILET, P., STANLEY, R.P., **On the foundations of combinatorial theory I**: Theory of Mobius functions, Z. Wahrscheinlichiketstheorie 2, 340-368, 1964.

SCHRÖDER, B. S., **Ordered sets:** an introduction. Boston: Bikhäuser Boston, 2002.

SPIEGEL, E., O'DONNELL, C. J., **Incidence Algebras**. New York: Marcel Dekker, 1997.