A INTEGRAL DE LEBESGUE:VIA MÉTODO DE RIESZ

Izabella Durante Temporini Furtado (PIBIC/CNPq/FA/Uem), Valéria Neves Domingos Cavalcanti (Orientador), e-mail: vndcavalcanti@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá /Centro de Ciências Exatas /Maringá, PR.

Área e subárea do conhecimento: Ciências Exatas e da Terra/Matemática

Palavras-chave: funções simples, integral de Lebesgue, teorema da convergência dominada

Resumo:

Tendo como base as ideias de Riemann, desenvolveu-se, inicialmente, uma teoria de integração. Esta teoria, entretanto, continha alguns inconvenientes que a tornavam inadequada ao estudo de vários problemas da Análise Matemática.
Assim, desejava-se obter um novo conceito de integral, de modo que a nova classe de funções integráveis contivesse a classe das funções integráveis à Riemann, isto é, onde os dois conceitos de integrais deveriam coincidir, e na qual os inconvenientes da integral de Riemann desaparecessem ou, pelo menos, fossem minimizados.
O passo decisivo no sentido de se obter uma definição de integral que eliminasse as deficiências existentes na integral de Riemann foi dado por Henri Lebesgue (1875-1941).

Introdução

O projeto em tela, permitiu o estudo da noção de integral segundo Lebesgue, porém apresentado por meio de um método simples e didático, o método de Riesz,de acordo com [3] responsável por introduzir este novo conceito de integral.
A integral de Lebesgue generaliza a noção de integral previamente idealizada por Cauchy, Riemann e Darboux , além de ser fundamental para a definição dos espaços de Sobolev. Com isso, daremos enfoque a definição da Integral de Lebesgue e o Teorema da Convergência Dominada também conhecido como Teorema de Lebesgue.

Materiais e Métodos

Foram realizados estudos individuais com apresentações de seminários, propiciando discussões acerca do conteúdo presente nas obras [1],[2] e [3] .
.

Resultados e Discussão

Apresentaremos um dos resultados principais concernentes a integral de Lebesgue, o Teorema de Lebesgue ou mais conhecido como Teorema da Convergência Dominada. Sua aplicação na resolução de problemas da física-matemática num contexto fraco (não clássico), torna este resultado um dos centrais da teoria desenvolvida por Lebesgue.

O método que usaremos para definir a integral de Lebesgue é o método de Riesz. Neste método, apesar de não ser necessária a construção de uma teoria de medida para os conjuntos, necessitamos, contudo, do conceito de conjunto de medida nula.

Definição 01: Diz-se que um conjunto E tem **medida nula** quando para todo ε > 0 existe uma família enumerável de intervalos abertos $\{I_k\}_{k\in N}$ satisfazendo às seguintes condições:

(i) $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, isto é, $\{I_k\}_{k\in N}$ é um recobrimento de E.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} amp(I_k) < \varepsilon$.

Agora, definiremos o conceito de função escada (ou simples), pois ela é fundamental, no método escolhido, para o estudo da integral de Lebesgue.

Definição 02: Diz-se que u: (a, b) → R é uma **função escada**, quando existe uma decomposição D do intervalo (a, b) tal que u é constante em cada subintervalo $I_k = (x_{k-1}, x_k)$, k = 1, 2, . . . , n, de D. A decomposição D associada à função escada u, não é univocamente determinada para cada u.

Lema: Sejam u e v duas funções escada definidas em (a, b). Então existe uma decomposição de (a, b) associada, simultaneamente, a u e v.

Com auxílio do Lema conseguimos imediatamente ver que a classe das funções escadas definidas em (a, b) é um espaço vetorial real. Para representá-lo será usada a notação $C_0(a,b)$ ou apenas C_0

Passaremos a demonstrar duas proposições, as quais sobre elas está moldada a definição de integral de Lebesgue apresentada por F. Riesz. Dada a importância de ambas, resolvemos identificá-las como "Primeiro Lema Fundamental" e "Segundo Lema Fundamental"

Proposição 01(Primeiro Lema Fundamental) : Seja (u_k) uma sequência decrescente de funções escada não negativas em (a, b). Se $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$ quase sempre em (a, b) então $\lim_{k\to\infty}\int_a^b u_k = 0$.

Proposição 02 (Segundo Lema Fundamental): Seja (u_k) uma sequência de funções escadas em (a, b), crescente e tal que a sequência das integrais $(\int u_k)$ tenha um majorante finito, isto é, existe uma constante M tal que $\int u_k < M$ para todo k ∈ N. Então a sequência (u_k) converge para um limite finito u quase sempre em (a, b).

No espaço vetorial C_0 a integral definida é um funcional linear. A próxima etapa é estender este funcional linear a um espaço vetorial contendo C_0, que será o espaço vetorial das funções integráveis à Lebesgue. Antes, passaremos por uma etapa intermediária, construindo uma classe C_1 que contém C_0 mas não é ainda um espaço vetorial.

Definição 03 : Representaremos por C_1 ou $C_1(a,b)$ a classe de todas as funções u: (a, b) → R que são limites quase sempre de sequência de funções de C_0 , satisfazendo as hipóteses do Segundo Lema Fundamental. Isto significa dizer que uma função u: (a, b) → R pertence a C_1 se e somente se existe uma sequência crescente (u_k) de funções de C_0 tal que a sequência das integrais $(\int u_k)$ tem um majorante e $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x)$ quase sempre em (a, b). Diremos que uma tal sequência define u.

Definição 04 : L(a,b) é o subespaço das funções reais em (a; b) gerado por $C_1(a,b)$. Ou seja , se w pertence a L(a; b) então ele será representado por

$$w = \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu w_\nu$$

sendo λ_ν reais e $w_\nu \in C_1(a,b)$. Decompondo o somatório em coeficientes $\lambda_\nu \geq 0$ e λ_ν < 0, representados , respectivamente por λ'_ν e λ''_ν, encontra-se

$$w = \sum_{\nu=1}^{m'} \lambda'_\nu w_\nu + \sum_{\nu=1}^{m''} \lambda''_\nu w_\nu$$

Fazendo $\lambda''_\nu = -\mu_\nu$, sendo $\mu_\nu > 0$, resulta que

w = u - v

sendo $u, v \in C_1(a,b)$. Resulta que $w \in C_1(a,b)$ se e somente se w representa-se como a diferença de duas funções de $C_1(a,b)$.

Definição 05: Seja w ∈ L(a, b) e escrevamos w = u−v onde u, v ∈ C1 . Define-se a integral de w em L(a, b) como sendo $\int w = \int u - \int v$, onde as integrais do segundo membro são definidas em C1.

Definição 06: L(a, b) é dito espaço vetorial das funções integráveis à Lebesgue. A integral definida em L(a, b) denomina-se integral de Lebesgue.

Teorema de Lebesgue(Teorema da Convergência Dominada): Seja (u_n) uma sequência de funções integráveis em (a, b), convergente quase sempre para a função u. Se existir uma função integrável u_0 tal que $|u_n| \leq u_0$ quase sempre para todo n ∈ N, então u é integrável e tem-se $\int u = \lim_{n\to\infty} \int u_n$.

Conclusões

É indiscutível a necessidade do estudo da teoria de integral na formação dos matemáticos com tendência para a Análise Matemática e suas aplicações. Por este motivo, decidimos pelo estudo da Integral de Lebesgue. E de modo a tornar este estudo simples e inteligível, optamos pelo método de Riesz.
Observamos que a demonstração e, consequente compreensão do Teorema apresentado, requer um grande embasamento teórico, desenvolvido ao longo do projeto. Os conceitos necessários não são triviais, embora amplamente utilizados.

Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte financeiro concedido pelo CNPq, sem o qual este projeto não se realizaria.

Referências

[1] FERNANDES, P. J**. Medida e Integração.** 2.ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2015.

[2] FRID, H. **Introdução Integral de Lebesgue.** 1999. 79f. Monografias del IMCA: Nº 5 ,Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, 1999.

[3] MEDEIROS, L. A. ; DE MELLO, E. A. **A Integral de Lebesgue.** 6.ed**.** Rio de Janeiro: UFRJ.IM, 2008.