INTRODUÇÃO A TEORIA DE STURM-LIOUVILLE

Joyce Dias Muraroto (PIBIC/CNPq/UEM), Fábio Matheus Amorin Natali (Orientador), e-mail: fmanatali@uem.br; Josiane Cristina de Oliveira Faria (Coorientadora), e-mail: jcofaria@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas / Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra/ Matemática.

Palavras-chave: equações diferenciais ordinárias, teoria de Sturm-Liouville, aplicações

Resumo:

Este projeto de pesquisa visa à sistematização do conhecimento matemático na área de equações diferenciais, objetivando um estudo inicial dos problemas de valores de contorno e uma introdução à teoria de Sturm-Liouville. Um estudo preliminar sobre aspectos teóricos das equações diferenciais ordinárias foi realizado, culminando com uma abordagem introdutória de elementos da Teoria de Sturm-Liouville. Tais conceitos foram abordados sob o ponto de vista analítico, dando sempre ênfase ao rigor matemático.

Introdução

As equações diferenciais aparecem na formulação de muitos modelos matemáticos da natureza que descrevem processos físicos ou relações que envolvem a taxa segundo a qual os fenômenos acontecem. O estudo de tais equações iniciou-se no século XVII com Newton e Leibniz, para resolução de problemas básicos da mecânica, e com o passar dos séculos muitos matemáticos passaram a trabalhar com esta teoria, buscando e propondo soluções de problemas notáveis de sua época. Neste sentido observa-se também que, historicamente, o problema de Sturm-Liouville gerou uma série de questionamentos que conduziram, no começo do século XX, a importantes avanços no desenvolvimento da Análise Funcional, com vistas às soluções destes problemas oriundos das equações diferenciais.

De fato, muitos problemas físicos envolvem a resolução de equações diferenciais de segunda ordem e o estudo de propriedades gerais das soluções obtidas. Os problemas de Sturm-Liouville formam uma classe ampla de tais problemas de contorno.

Considerando a importância da pesquisa em equações diferenciais na comunidade científica internacional, este projeto propôs a realização de um estudo introdutório da Teoria de Sturm-Liouville, objetivando a resolução de alguns problemas de valores de contorno, bem como o aprimoramento da técnica e do rigor em matemática através do estudo analítico e sistemático dos elementos básicos que compõem esta teoria.

Materiais e Métodos

A metodologia utilizada no desenvolvimento deste projeto baseia-se no método hipotético-dedutivo o qual, a partir do estudo individual dos tópicos relacionados neste plano de trabalho foi realizado encontros semanais onde foi apresentada a evolução do trabalho e eventuais dúvidas que surgiram neste período. Os tópicos estudados foram baseados principalmente nos textos de Figueiredo e Neves (2015) e Sotomayor (1942) e como material complementar utilizamos as notas de aula da profª drª. Valéria Neves Domingos Cavalcanti.

Resultados e Discussão

No desenvolvimento desse projeto, estudamos as propriedades gerais das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, como elas se comportam geometricamente, a unicidade e existência de soluções do problema de valor inicial. Além disso, foi realizado um estudo introdutório da Teoria de Sturm-Liouville e um estudo analítico e sistemático dos elementos básicos que compõem esta teoria. Como aplicação dos resultados obtidos nesta pesquisa, estudamos uma aplicação à física, o problema da corda vibrante.

Definição: Uma equação de Sturm-Liouville regular é do tipo

$$(p(x)y')' + (\lambda\rho(x) - q(x))y = 0$$

onde p, q, ρ são funções contínuas definidas em um intervalo $[a, b]$, $p(x) > 0$, $\forall\, x \in [a, b]$ e $\lambda \in R$.

Um caso particular da equação de Sturm-Liouville é dado por

$$y'' + \lambda = 0,$$

cuja solução é dada por

$$y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + C_2 \mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\, x).$$

Neste contexto, generalizaremos para as soluções da equação de Sturm-Liouville as propriedades de $\cos(\sqrt{\lambda}\, x)$ e $\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\, x)$. No caso particular em que a equação $y'' + \lambda = 0$, $\lambda > 0$ em $[0, \pi]$ satisfaz a condição $y(0) = 0$ e $y(\pi) = 0$, os únicos valores de λ para os quais a equação tem solução não trivial são dados por: $\lambda = n^2$; $n = 1, 2, 3, \ldots$, e neste caso, as respectivas soluções da equação são da forma $y_n(x) = C_n \mathrm{sen}(nx)$; $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Considere u_1 e u_2 soluções da equação de Sturm-Liouville Há situações em que desejamos que u_1 e u_2 sejam "ortogonais" em $[a, b]$ em relação ao peso ρ. Logo devemos impor às soluções da equação de Sturm-Liouville condições de contorno lineares em u que anulem o termo $p(u_2' u_1 - u_1' u_2)\big|_a^b$ Tais condições de contorno são ditas auto-adjuntas. Um exemplo canônico de tais condições ocorre quando p(a) = p(b). Neste caso, impomos as condições periódicas:

$$\begin{cases} u(a) = u(b) \\ u'(a) = u'(b) \end{cases}.$$

Temos então, a seguinte definição relativa às soluções do problema de Sturm-Liouville. Os valores de λ para os quais o problema admite solução não trivial, isto é para as quais a equação de Sturm-Liouville admite solução não trivial satisfazendo as condições de contorno fixadas são ditos autovalores do problema. As soluções não triviais correspondentes são ditas autofunções do problema associados à λ.

Mostramos que todo problema de Sturm-Liouville regular com condições de contorno auto-adjuntas admite uma sequência enumerável de autovalores que tende para o infinito. Provamos isto, no caso particular do problema

$$\left| \begin{array}{l} u'' + (\lambda\rho(x) - q(x))u = 0 \\ u(a) = u(b) = 0 \end{array} \right.$$

onde q e ρ são contínuas em [a, b] e $\rho(x) > 0$, $\forall\, x \in [a, b]$.

De fato, temos o seguinte resultado principal:

Teorema: Os autovalores do problema de Sturm-Liouville regular dado em [a, b] por:

$$\left| \begin{array}{l} u'' + (\lambda\rho(x) - q(x))u = 0 \\ u(a) = u(b) = 0 \end{array} \right.$$

onde $\rho, q \in C^0([a, b])$, com $\rho(x) > 0$, $\forall\, x \in [a, b]$, fornecem uma sequência $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ tal que $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$. Além disso, a menos de uma constante, existe apenas uma autofunções u_n associada a cada λ_n, e u_n tem exatamente n zeros em]a, b[.

Conclusões

O objetivo deste projeto de Iniciação Científica foi o de realizar um estudo inicial e sistemático de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira e segunda ordem, com enfoque na Teoria de Sturm-Liouville e uma aplicação de seu resultado, o qual nos permite ter uma visão mais ampla do que ocorre em ambientes não especificamente matemáticos. Os resultados obtidos servirão de base para estudos futuros.

Agradecimentos

Agradeço a CNPq pelo apoio financeiro e a UEM pela infraestrutura.

Referências

CAVALCANTI, V. N. D. **Equações Diferenciais Ordinárias.** Notas de Aula.

FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas.** 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, (Coleção Matemática Universitária), 2015.

SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.** Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, 1942.