O ANEL QUOCIENTE DE MARTINDALE

Juliana Camile do Nascimento (PIBIC/FA/UEM), Marcelo Escudeiro Hernandes (Orientador), e-mail: mehernandes@uem.br; Laerte Bemm (Co-orientador), e-mail: laertebemm1983@yahoo.com.br.

Universidade Estadual de Maringá/Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra/Matemática

Palavras-chave: corpo de frações, anel de quocientes de Martindale, anel de quocientes maximal

Resumo:

A partir das construções e de algumas propriedades do corpo de frações de um domínio de integridade e do anel de quocientes de Martindale de um anel semiprimo não comutativo, visamos mostrar a igualdade destas estruturas para o caso de um domínio de integridade comutativo.

Introdução

A construção do corpo de frações *K* de um domínio de integridade *R* é muito semelhante à construção dos números racionais a partir dos números inteiros. Mais precisamente, tal construção é feita a partir de uma relação de equivalência sobre o conjunto $R \times R^*$ e os elementos de *K* são as classes de equivalência desta relação.

Para o caso de anéis primos e semiprimos não comutativos (que são generalizações de domínios de integridade), uma construção semelhante é possível. W. S. Martindale III, em 1969, foi o primeiro a propor tal construção para anéis primos, com o objetivo de estudar anéis com identidades polinomiais. Em 1972, S. A. Amitsur generalizou a construção de Martindale para anéis semiprimos.

O objetivo principal deste trabalho é estudar as principais propriedades destes anéis. Em particular, veremos que o anel de quocientes de Martindale e o corpo das frações de um domínio de integridade comutativo são iguais.

Materiais e métodos

O projeto foi desenvolvido por meio de pesquisas bibliográficas e apresentações de seminários semanais ao orientador a fim de expor os resultados estudados e de esclarecer possíveis dúvidas.

Resultados e Discussão

Apresentamos abaixo os principais resultados estudados sobre os quais falaremos na apresentação. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências listadas ao final deste resumo.

A construção do corpo de frações K de um domínio de integridade comutativo é vista num curso inicial de álgebra. Em [1] e [4] podem ser encontrados maiores detalhes a respeito deste assunto.

Neste trabalho, estudamos inicialmente o anel de quocientes maximal de um anel semiprimo. Para isto, utilizamos as referências [3] e [5].

Definição 01: Um anel R é dito um anel semiprimo se (0) é um ideal semiprimo de R, isto é, se um ideal I de R é tal que $I^2 \subset (0)$, então $I \subset (0)$.

Definição 02: Para um ideal I de um anel R, uma aplicação $f: I \rightarrow R$ é dita R-linear à direita se $f(xr) = f(x)r$, para todo $x \in I$ e $r \in R$.

Definição 03: Um ideal à direita I de R é dito denso se para quaisquer elementos $0 \neq x$, $y \in R$ existe $r \in R$ tal que $xr \neq 0$ e $yr \in I$.

Mostramos que a interseção e o produto de dois ideais densos também são ideais densos e que a imagem inversa de um ideal denso por uma aplicação R-linear à direita, também é denso. Denotamos por $D = D(R)$ o conjunto de todos os ideais densos de R.

Seja R um anel semiprimo. Considerando o conjunto

$$H = \{(f; J) \mid J \in D(R), f: J \rightarrow R \text{ é } R\text{-linear à direita}\},$$

definimos $(f; J) \sim (g; K)$ se existe $L \subset J \cap K$ tal que $L \in D$ e $f = g$ sobre L. É fácil ver que $\sim$ é uma relação de equivalência. Denotamos por $[f; J]$ a classe de equivalência determinada por $(f; J) \in H$ e por Q o conjunto de todas as classes de equivalência. Definimos, então, a adição e a multiplicação em Q como se segue:

$$[f; J] + [g; K] = [f+g; J \cap K]$$
$$[f; J]\,[g; K] = [fg; g^{-1}(J)].$$

Tais operações estão bem definidas e dão ao conjunto Q uma estrutura de anel com identidade. O anel $Q = Q(R)$ é o anel de quocientes maximal do anel semiprimo R.

Proposição 04: Se R é um anel semiprimo, então $Q(R)$ satisfaz:

(i) R é um subanel de $Q(R)$;
(ii) Para todo $q \in Q(R)$, existe $J \in D$ tal que $qJ \subset R$;
(iii) Para todo $q \in Q(R)$ e $J \in D$, $qJ = 0$ se, e somente se, $q = 0$;

(iv) Para todo $J \in D$ e $f: J \to R$, existe $q \in Q(R)$ tal que $f(x) = qx$, para todo $x \in J$.

Mais ainda, tais propriedades caracterizam o anel $Q(R)$ a menos de isomorfismo.

O próximo resultado nos fornece uma das principais propriedades do anel de quocientes maximal:

Teorema 05: Seja K um ideal denso de um anel semiprimo R e S um subanel de R contendo K. Então, S é semiprimo e $Q(S)=Q(R)$. Em particular, Q é semiprimo e $Q(Q(R))=Q(R)$.

Observe que podemos aplicar o resultado anterior no caso em que R é o anel dos inteiros Z. Se nZ é um ideal de Z, então nZ é denso e $Q(nZ)=Q(Z)$. Veremos a diante que $Q(Z)$ é o anel dos números racionais.

Para a construção do anel de quocientes de Martindale de um anel semiprimo, utilizamos o conceito de anulador, definido como segue:

Definição 06: O anulador à esquerda de um subconjunto S de um anel R é o conjunto $\{x \in R \mid xS = 0\}$. Tal conjunto é denotado por $Ann(S)$.

Sejam R um anel semiprimo e $A = A\ (R) = \{ I \mid I$ é um ideal de R e $Ann(I) = 0\}$. Considerando o conjunto

$$T = \{(f; J) \mid J \in A,\ f: J \to R \text{ é } R\text{-linear à direita}\},$$

definimos $(f; J) \approx (g; K)$ se existe $L \subset J \cap K$ tal que $L \in Ann(R)$ e $f = g$ sobre L. É fácil ver que $\approx$ é uma relação de equivalência. Denotamos por $\{f; J\}$ a classe de equivalência determinada por $(f; J) \in T$ e por Q' o conjunto de todas as classes de equivalência. Definimos então, a adição e a multiplicação em Q' como se segue:

$$\{f; J\} + \{g; K\} = \{f+g; KJ\}$$
$$\{f; J\}\ \{g; K\} = \{fg; KJ\}.$$

Tais operações estão bem definidas e dão ao conjunto Q' uma estrutura de anel com identidade. O anel $Q' = Q'(R)$ é o anel de quocientes de Martindale do anel semiprimo R e também é caracterizado por propriedades análogas às descritas na *Proposição 04*. Também temos que $Q'(R)$ é um subanel de $Q(R)$.

Teorema 07: Se R é um domínio de integridade comutativo, então o seu corpo de frações coincide com o seu anel de quocientes de Martindale e também com o anel de quocientes maximal. Em particular, o anel de quocientes de Martindale e maximal do anel dos números inteiros coincide com o anel dos números racionais.

Para isto, basta considerar o isomorfismo $\varphi: K \to Q'(R)$ dado por

$$\varphi(a/b) = \{f;\ Rb\},$$

onde *f: Rb* → *R*, tal que *f(rb)* = *ra*, para todo *r* ϵ *R*, é uma aplicação *R*-linear. Maiores detalhes podem ser encontrados em [2].

Conclusões

Apresentamos algumas construções e propriedades de estruturas algébricas importantes para o desenvolvimento deste estudo, como o corpo de frações de um domínio de integridade e os anéis de quocientes maximal e de Martindale de anéis semiprimos não comutativos. Concluímos, então, que o corpo de frações e o anel de quocientes de Martindale à direita de um domínio de integridade comutativo coincidem.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

[1] MUSILI, C. **Introduction to Rings and Modules**. Narosa Publishing House, 1994 (p.77-81).

[2] MIRANDA, E. S. **Anel Quocientes de Martindale**. UEM, 2015.

[3] BEIDAR, K. I.; MARTINDALE III, W. S.; MIKHALEV, A. V. **Rings With Generalized Identities**. Marcel Dekker, Inc., 1995 (p.51-61).

[4] BHATTACHARYA, P. B., JAIN, S. K., NAGPAUL, S. R. **Basic Abstract Algebra**. 2nd. edt. Cambridge University Press, 1994 (p.224-231).

[5] LAM, T. Y. **A First Course in Noncommutative Rings**. Springer-Verlag, Inc., 2001 (p.154-159).