ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS

Maicon Sartori Hespanha (PIBIC/CNPq/FA/Uem), Luciene Parron Gimenes Arantes (Orientador), e-mail: lpgarantes@uem.br

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra/Matemática

Palavras-chave: métrica, espaços métricos completos, espaços de Banach.

Resumo

O objetivo do nosso projeto de iniciação científica foi o estudo das diversas formas do Teorema de Hahn-Banach, a saber, conhecemos suas diferentes formas, analítica e geométricas. No desenvolvimento do projeto nos concentramos nos seguintes tópicos: espaços métricos, espaços normados, espaços de Banach e de Hilbert, Teoremas de Hahn-Banach e aplicações. Dentre estas aplicações, escolhemos uma que será apresentada nesse encontro científico.

Introdução

Neste projeto estudamos os conceitos de espaços métricos e normados. Também conhecemos a definição de espaços de Banach e espaços de Hilbert guiados pela nossa referência básica [3]. Para a realização deste projeto precisamos de alguns pré-requisitos, os quais não são vistos nas disciplinas básicas do curso de Matemática, mais especificamente, alguns fatos da teoria de Análise Funcional. No final do projeto, apresentamos as diversas formas do Teorema de Hahn-Banach e algumas aplicações diretas deste resultado.
O Teorema de Hahn-Banach (forma analítica) é um teorema de extensão para funcionais lineares. A aplicação a ser estendida é um funcional linear que está definida num subespaço G de um espaço vetorial E e possui uma propriedade de limitação que pode ser formulada em termos de funcional sublinear. Já as formas geométricas do Teorema de Hahn-Banach nos dizem que podemos separar certos subconjuntos de um espaço normado E por hiperplanos fechados.

Materiais e Métodos

Os materiais utilizados para a realização deste projeto, em geral, foram os livros citados na bibliografia. Este projeto foi desenvolvido na forma de seminários semanais coordenados pela orientadora e/ou coorientador do projeto. Os temas abordados foram, inicialmente, discutidos e indicados pela orientadora juntamente com o bolsista.

Resultados e Discussão

Este trabalho consiste, inicialmente, em um estudo dos espaços métricos completos, espaços de Banach e espaços de Hilbert, apontando exemplos e principais resultados necessários para enunciar e demonstrar o seguinte teorema:
Teorema de Hahn-Banach (forma Analítica): Sejam E um espaço vetorial real, p um funcional sublinear definido em E, G um subespaço vetorial real e g uma aplicação definida em G tal que g(x)<p(x), para todo x pertencente a G. Então, existe um funcional linear f, definido em E, tal que f(x)<p(x), para todo x de E e f(x)=g(x), para todo x de G.

Ainda neste trabalho, a partir do teorema acima, obtemos uma maneira de separar conjuntos convexos por hiperplanos, conhecida como Formas Geométricas do Teorema de Hahn-Banach, para mais detalhes veja [1]. Por fim, estudamos três aplicações diretas do resultado acima, que são as integrais de Riemann-Stieltjes, os limites de Banach e a ordenação de espaços vetoriais. Dentre elas, nesse encontro de iniciação científica apresentaremos os limites de Banach que consistem no seguinte: Seja *c* o espaço normado de todas as sequências convergentes. Dada a sequência convergente (x_n), definimos o funcional linear L(x)=lim x_n, quando n tende ao infinito. O funcional L é tal que ||L||=1, e ainda, definindo $(x_n)'=(x_2,x_3,...)$, temos que L(x)=L(x'). Além disso, se $x_n>0$, para todo número natural n, então L(x)>0. O objetivo principal desta aplicação é mostrar que as propriedades desse funcional podem ser estendidas para o conjunto das sequências reais limitadas, denotado por ℓ^∞. Vejamos o seguinte teorema, cuja prova pode ser encontrada em [2].
Teorema: Sejam ℓ^∞ o espaço de sequências limitadas de números reais e *c* o subespaço normado de sequências convergentes, cuja norma é dada pela norma do supremo. Existe um funcional linear $L: \ell^\infty \to \mathbb{R}$ tal que
1) ||L||=1;
2) Se x pertence a *c*, então L(x)=lim x_n;
3) Se x pertence a ℓ^∞ e $x_n>0$, para todo número natural n, então L(x)>0;
4) Se x pertence a ℓ^∞ e $x'=(x_2,x_3,...)$, então L(x)=L(x').

Conclusões

Durante o projeto, podemos observar que a teoria de Análise Funcional é uma ferramenta matemática com aplicações em diversos campos de estudo.

Agradecimentos

Agradecemos a UEM e ao CNPQ pelo apoio financeiro concedido.

Referências

[1] CAVALCANTI, M. M., CAVALCANTI, V. N. D., KOMORNIC, V. **Introdução à análise funcional.** Ed: Eduem, 2011.

[2] CONWAY, J. B. **A course in Functional Analysys.** ed: Springer-Verlag, 1985.

[3] KREISZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications.** ed: John Wiley & Sons, 1978.