# SOBRE ALGUNS PROBLEMAS DA TEORIA DOS CÁLCULOS APROXIMADOS

Pedro Gabriel Papa Torelli (PIBIC/CNPq/FA/Uem), Cícero Lopes Frota (Orientador), e-mail: clfrota@uem.br

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas / Maringá, PR.

**Ciências Exatas e da Terra / Matemática.**

**Palavras-chave:** teoria de aproximação, aproximação de raízes de equações, cálculo aproximado de integrais

## Resumo

Neste projeto estudamos Análise Real e aplicamos esta teoria para o desenvolvimento de métodos e técnicas sobre Cálculos Aproximados, especificamente no que se refere à resolução de equações e cálculo de integrais. Resultados sobre Estimativas de erro e aplicações também são apresentados.

## Introdução

No meio científico, especialmente nas Ciências Exatas, é muito frequente nos depararmos com a necessidade de resolver equações e também calcular integrais. Esses dois problemas básicos da Matemática estão presentes em outras áreas como Física, Química, Engenharias, Biologia e Estatística. Sabemos também que em meio aos cálculos, por vezes temos que utilizar resultados aproximados, pois muitas vezes os dispositivos geralmente utilizados encontram dificuldades técnicas ou até mesmo são impossíveis de serem aplicados. Diante deste contexto nasceu uma teoria matemática conhecida como Teoria dos Cálculos Aproximados, a qual contém resultados que visam solucionar esse tipo de problema.

Neste projeto, após um estudo completo sobre análise matemática, estudamos três métodos para aproximação de raízes de equações do tipo $f(x) = 0$ e três métodos para aproximação de integrais, especialmente úteis quando não é possível utilizarmos o Teorema Fundamental do Cálculo.

## Materiais e Métodos

Os estudos preliminares sobre análise real seguiram os tópicos e a sequência da referencia bibliográfica [2], Bartle e Sherbert (2010), a saber: números reais, sequências e séries, funções, limites, continuidade, derivada e integral. A metodologia utilizada na pesquisa consistiu de estudos individuais e encontro semanal para realização de seminário público para debate dos resultados principais.

Após domínio dos conceitos centrais e da linguagem matemática da Análise Real, passamos para o estudo dos problemas relacionados aos cálculos aproximados, inicialmente sobre raízes de equações e depois sobre cálculos de integrais. Nossa abordagem foi fortemente influenciada pelos textos [1], [3], [4] e [5], referencias muito utilizadas na pesquisa.

## Resultados e Discussão

A modelagem matemática de diversos problemas nos remete a uma equação do tipo

$$f(x) = 0\,. \qquad (1)$$

Surgem naturalmente três questões: Existe raiz para a equação (1)? Se existe raiz, ela é única? É possível calcular o valor da raiz?
Impondo condições apropriadas sobre a função $f$ é possível garantir a existência de pelo menos uma raiz. O resultado principal nesta direção é consequência do Teorema do Valor Intermediário e afirma que se $f \in \mathcal{A}([a,b])$ então $Z(f;(a,b)) \neq \emptyset$,onde aqui denotamos:

$$\mathcal{A}([a,b]) = \{\, f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R};\;\; f \text{ é contínua e } f(a).f(b) < 0\},$$

e

$$Z(f;(a,b)) = \{c \;\in (a,b) \text{ tal que } f(c) = 0\}.$$

Alternativamente, é possível provar este resultado por meio de uma abordagem direta e construtiva, conhecida como método da bissecção, que através de sucessivas divisões de intervalos ao meio determina um algoritmo que encontra uma raiz exata da equação (1) ou gera uma sequencia de pontos $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para uma raiz $c$ da equação (1), satisfazendo à seguinte estimativa de erro $|p_n - c| < 1/2^n$.
Acrescentando hipóteses de regularidade à função $f$ é possível provar existência e unicidade de uma raiz $c$ da equação (1). De fato, supondo que $f \in \mathcal{A}([a,b])$ é duas vezes derivável e $f''$ não é identicamente nula e não muda de sinal em $[a,b]$, então $Z(f;(a,b)) = \{\, c\,\}$. Além disso, a sequencia de pontos $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recorrência, pelos pontos de interseção de cordas, ligando pontos do gráfico de $f$, com o eixo $x$ converge para a única raiz da equação (1). Este método é denominado método das cordas.
Por outro lado, o método de Newton se baseia na construção de uma sequência de pontos que convergem à raiz da equação a partir de retas tangentes ao gráfico da função $f$. Também é necessário admitir condições de regularidade, ou seja, supondo que $f \in \mathcal{A}([a,b])$ é duas vezes derivável, $f'$ nunca se anula e $f''$ é limitada então $Z(f;(a,b)) = \{\, c\,\}$ e, além disso, é possível determinar uma vizinhança de $c$ de modo que partindo de um ponto $p_1$nesta vizinhança e definindo, por recorrência, uma sequencia $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , pelas intercessões de retas tangentes ao gráfico de $f$ com o eixo $x$, está converge para a única raiz da equação (1).
O problema sobre aproximação do cálculo de integrais é interessante quando desejamos encontrar a integral de uma função que não possui

primitiva, numa forma analítica, pois nesta condição não podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ por $\wp_n$ denotamos a partição uniforme do intervalo $[a, b]$ que o divide em $n$ subintervalos de igual comprimento $h_n = \frac{b-a}{n}$. Isto é:

$$\wp_n = \{ a = a_0 < a_1 = a + h_n < a_2 = a + 2h_n < \ldots < a_n = a + nh_n = b\}$$

Assim definimos as seguintes aproximações para a integral de uma função $f$ definida e contínua no intervalo $[a, b]$:

$n$-ésima aproximação à esquerda = $E_n(f) = h_n \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh_n)$

$n$-ésima aproximação à direita = $D_n(f) = h_n \sum_{k=1}^{n} f(a + kh_n)$

$n$-ésima aproximação pelo ponto médio = $M_n(f) = h_n \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \left(\frac{2k-1}{2}\right) h_n\right)$

$n$-ésima aproximação trapezoidal = $\frac{E_n(f)+D_n(f)}{2}$

$n$-ésima aproximação de Simpson = $S_n = S_{2j} = \frac{2M_j(f)+T_j(f)}{3}$

Os nomes são sugestivos, imagine o caso particular em que $f$ é positiva, então a aproximação à esquerda consiste em aproximar a integral da função $f$ no intervalo $[a, b]$ a partir da área dos retângulos de base igual ao comprimento dos subintervalos formados pelos pontos da partição e de altura igual ao valor da função aplicada no ponto extremo esquerdo do intervalo em questão. Analogamente, as aproximações à direita e pelo ponto médio. A aproximação trapezoidal aproxima o valor da integral de f em cada subintervalo formado pelos pontos da partição ao calcular a área do trapézio cujas bases são valores de $f$ aplicada nos pontos extremos do subintervalo e altura igual ao comprimento do subintervalo. A última aproximação, aproximação de Simpson, aproxima o gráfico da função f por (n-1) funções polinomiais de grau menor ou igual a 2.

É claro que todas as sequências (aproximações) convergem para $L = \int_a^b f(x)dx$. Uma questão interessante é saber qual destas aproximações é mais eficiente? Isto está relacionado com resultados sobre estimativas de erro:

a) Se $f$ é monótona então $|T_n(f) - L| \leq |f(b) - f(a)|\frac{(b-a)}{2n}$.

b) Se $f \in C^2([a,b])$ então $|M_n(f) - L| \leq \left[\frac{(b-a)^3}{24} \|f''\|\right]\frac{1}{n^2}$.

c) Se $f \in C^2([a,b])$ então $|T_n(f) - L| \leq \left[\frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|\right]\frac{1}{n^2}$.

d) Se $f \in C^4([a,b])$ então $|S_n(f) - L| \leq \left[\frac{(b-a)^5}{180} \|f^{(4)}\|\right]\frac{1}{n^4}$.

## Conclusões

A Análise Real é uma teoria fundamental para validar resultados sobre cálculos aproximados, bem como para estabelecer estimativas de erro. Esta é a fundamentação teórica necessária para implem6entar programas computacionais que visam calcular raízes de equações e valores de integrais.

## Agradecimentos

Agradeço à Universidade Estadual de Maringá e ao CNPq pelo apoio estrutural e financeiro para o desenvolvimento deste projeto de iniciação científica.

## Referências

[1] Anton, H.; Bivens, I. & Davis, S.; **Cálculo**, vol. 1, (tradução: Claus Ivo Doering), 10ª Edição; Porto Alegre: Bookman, 2014.

[2] Bartle, R. G. & Sherbert D. R.; **Introduction to real analysis,** Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc.; 2010.

[3] Kudriávtsev, L. D.; **Curso de Análisis Matemático**, Tomo I, Editora MIR, 1984.

[4] Moreira, C. N. & Cabral, M. A. P.; **Curso de Análise Real**, Departamento de Matemática Aplicada, IM-UFRJ, 2011.

[5] Rudim, W.; **Principles of Mathematical Analysis**, 3rd edition, McGraw-HILL International Book Company, 1976.