ANÁLISE DA DEFLEXÃO DE VIGAS BI ENGASTADAS COM USO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Felipe Guilherme da Silva Bassaco (PIBIC/CNPq/FA/UEM), Juan Amadeo Soriano Palomino (Orientador). E-mail: jaspalomino@uem.br

Universidade Estadual de Maringá/Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra /Matemática

Palavras-chave: diferenças finitas, deflexão em vigas, equações diferenciais

Resumo:

Este artigo apresenta uma comparação entre a solução numérica e a analítica de um problema de valor de contorno que controla a deflexão de uma viga bi engastada. A solução numérica foi obtida por meio do Método das Diferenças Finitas e comparada com a solução analítica.

Introdução

Considere o Problema de Valor de Contorno (PVC),

(1) $$v^{(4)}{}_{(x)} = \frac{q}{EI}, \qquad a < x < b$$

(2) $$v_{(a)} = 0\,;\ \frac{dv_{(a)}}{dx} = 0\,;\ v_{(b)} = 0\,;\ \frac{dv_{(b)}}{dx} = 0$$

Que controla a deflexão de vigas, onde v é a função da deflexão, q o carregamento distribuído uniformemente na viga, E o módulo de elasticidade do material e I o momento de inércia da seção transversal (BEER et al., 2011).

As Condições de Contorno (CC) apresentadas são devidas ao fato da viga ser bi engasta, ou seja, a deflexão e o giro da seção transversal são nulos nas bordas (BEER et al., 2011).

O PVC (1) -(2) possui como solução analítica a função dada por

(3) $$v_{(x)} = \frac{q}{24.EI}(x^4 - 2L.x^3 + L^2.x^2)$$

Deseja-se obter a solução numérica do PVC (1) -(2) para comprovar a eficiência do método das diferenças finitas, a qual será comparada graficamente com a função (3).

Materiais e métodos

A fim de obter a solução numérica do PVC (1) -(2), utiliza-se o Método das Diferenças Finitas (MDF), ou seja, aplicou-se as equações de diferenças centradas de segunda ordem,

(4) $$\frac{d^2 v_i}{dx^2} = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}$$

(5) $$\frac{dv}{dx} = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}$$

Obtendo,

(6) $$v_{i+2} - 4v_{i+1} + 6v_i - 4v_{i-1} + v_{i-2} = \frac{qh^4}{EI}$$

para i= 1,...,M, em que M é um número inteiro positivo elegido e h=(b-a)/(m-1) o tamanho do passo dado para discretização do intervalo [a,b].
Ao fazer i variar de 1 até M na equação (6), obtêm-se um sistema de M equações e (M+4) incógnitas. Ao aplicar as condições de contorno encontra-se um sistema de M equações e M incógnitas, o qual possui uma única solução numérica (RUGGIERO e LOPES).

Resultados e Discussão

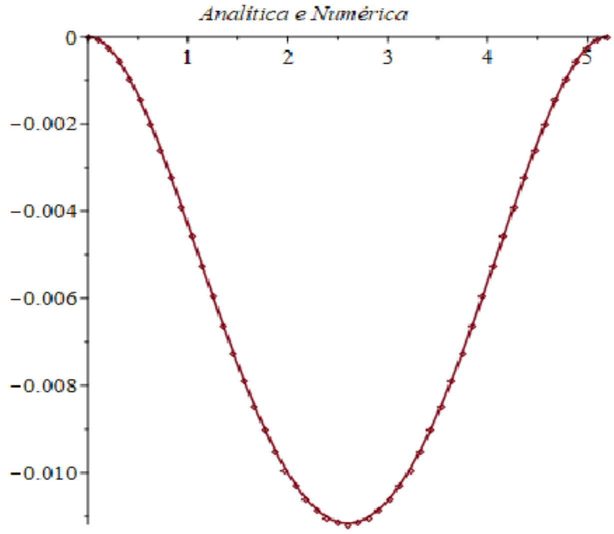
A solução do sistema gerado pela equação (6) foi obtida via software Maple e comparada com a solução analítica dada pela equação (3).
Para um estudo de caso, considerou-se uma viga retangular com uma seção transversal de (6x16) cm, por conseguinte, momento de inércia I = $2{,}048 \times 10^{-5}$ m^4, módulo de elasticidade E = 107 KPa, carga distribuída q = 1,2 KN.m, comprimento L = 5,2m, a = 0 e b = 5,2, obtendo o PVC

(7) $$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{1{,}2}{10^7 . 2{,}048 . 10^{-5}}$$

$$v_{(0)} = 0 \; ; \frac{dv_{(0)}}{dx} = 0 \; ; \; v_{(5{,}2)} = 0 \; ; \frac{dv_{(5{,}2)}}{dx} = 0$$

cuja solução analítica e numérica (M=50) estão representadas graficamente na figura (1),

Figura 1 – Comparação gráfica entre Soluções Analítica e Numérica.



A seguir apresenta-se uma tabela onde é feita uma comparação para alguns pontos calculados

Tabela 1 – Comparação entre Soluções Analítica e Numérica.

i	x(i)	Numérica	Analítica	Erro Percentual
1	0,104	-0,000071373939	-0,000068574961	0,040816322653
15	1,560	-0,007902114675	-0,007872125625	0,003809523809
24	2,496	-0,01115661206	-0,011120967936	0,000320512784
25	2,600	-0,01119234188	-0,011156640625	0,003200000448
26	2,704	-0,01115661206	-0,011120967936	0,003205127845
35	3,640	-0,007902114675	-0,007872125625	0,003809523809
49	5,096	-0,000071373939	-0,000068574962	0,040816311352

Conclusões

Com base na Tabela 1 e na Figura 1 conclui a eficiência do MDF.

O objetivo deste projeto de Iniciação Científica foi o de realizar um estudo do MDF aplicado em uma viga bi engastada, e conclui-se a eficiência do método. Os resultados obtidos servirão de base para estudos futuros.

Agradecimentos

Agradeço a CNPq pelo apoio financeiro e a UEM pela infraestrutura.

Ao Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino, coordenador do projeto, pela oportunidade, apoio e orientação.
Ao Prof. Dr. Adilandri Mércio Lobeiro pela orientação e apoio durante este período.
À Profª. Ms. Lígia Bittencourt Ferraz de Camargo pela confiança e orientação.

Referências

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. Jr.; **Resistência dos materiais.** 5ª Edição. São Paulo: McGraw-Hill, 2011.

RUGGIERO, M. A. G. LOPES, V. L. R.; **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais.** 2ª Edição. São Paulo: Pearson.