

## IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM OBJECT PASCAL NA ANÁLISE DE VIGAS EM REGIME ELÁSTICO LINEAR UTILIZANDO A TEORIA DE REISSNER-MINDLIN

Bruno Tolardo de Lira (PIC/Uem), e-mail: brunotolardo@outlook.com,  
Leonardo Caloi Santos (PIC/Uem), e-mail: santos.leonardocaloi@gmail.com,  
Wilson Wesley Wutzow (Orientador), e-mail: wwwutzow@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Tecnologia / Maringá, PR.

**Área: Engenharia Civil, Subárea: Estruturas**

**Palavras-chave:** métodos numéricos, método dos elementos finitos, implementação computacional, Reissner-Mindlin.

### Resumo:

O presente trabalho consistiu na implementação de um programa computacional no Método dos Elementos Finitos (MEF) usando o modelo de Reissner-Mindlin simplificado para vigas (Timoshenko). Buscou-se observar as diferenças do modelo de Bernoulli-Navier e estudar em que condições (relações geométricas) o modelo implementado é mais indicado. Os resultados obtidos permitiram observar que a diferença mais relevante entre os modelos acontece com o aumento da relação altura de seção pelo comprimento da viga, em que o modelo proposto por Reissner-Mindlin representa melhor a realidade para elementos estruturais com grande altura em relação ao seu comprimento.

### Introdução

O uso de métodos numéricos aliados aos avanços na computação vem sendo utilizados cada vez mais na solução de problemas complexos na engenharia, proporcionando análises cada vez mais próximas da realidade. Entre eles se destacam o Método dos Elementos Finitos (MEF) e Método dos Elementos de Contorno (MEC), em que a escolha deles depende do que cada um oferece, do tipo da análise e o meio a ser modelado. (PACCOLA,2004).

No presente trabalho, foi desenvolvido um programa computacional usando o MEF para um elemento de viga, para determinação dos esforços e deslocamentos da estrutura. As hipóteses adotadas para o desenvolvimento do elemento em estudo seguem o modelo proposto independentemente por Timoshenko(1921) para vigas, Reissner(1945) e Mindlin(1951) para placas e cascas. Segundo estes modelos as seções transversais planas (de vigas, placas ou chapas) permanecem planas, mas não necessariamente ortogonais à linha neutra, diferentemente do modelo de Bernoulli-Navier que impõe que as seções permanecerão planas e ortogonais a linha neutra após a deformação.

O elemento implementado foi deduzido com uma técnica semelhante a apresentada por Paccola(2004) que neste caso desenvolveu elementos de vigas, pórticos planos, pórticos 3D e cascas. Em Paccola (2001) foi deduzido o elemento de placa com esta mesma cinemática. Nesta pesquisa, assim como em Paccola(2004) e Paccola (2001), a rotação da seção transversal é considerada como grau de liberdade independente, ou seja, não é definida como a derivada do deslocamento vertical em relação ao eixo horizontal, nem como uma correção desta derivada para se introduzir a energia devida à força cortante na peça. Com isso, assume-se que seções planas permanecem planas, porém não necessariamente ortogonais ao eixo do elemento após a deformação.

Foi adotado um polinômio completo de grau 3 tanto para aproximar a deflexão quanto a rotação, independentes entre si.

Desta forma, o programa desenvolvido tem como objetivo comparar o modelo apresentado Reissner-Mindlin com o modelo de Bernoulli-Navier.

## Materiais e métodos

Utilizando as hipóteses da teoria de Reissner-Mindlin, com base nas relações entre deformação e deslocamento e na lei constitutiva do material ou seja a relação entre as tensões e deformações em regime elástico oriundas da teoria de resistência dos materiais, foi desenvolvido algebricamente o funcional que descreve a energia total do elemento em estudo, adotando-se uma aproximação em deslocamento e rotação independentes entre si através de um polinômio de grau 3. Devido à esta aproximação, foi necessário empregar um elemento de 4 nós onde cada nó contem 3 graus de liberdade sendo eles respectivamente o deslocamento horizontal, o deslocamento vertical e a rotação. Com isso foi deduzida uma matriz de rigidez de ordem 12, para um elemento finito de viga de 4 nós.

Foi implementado um programa em “*Object Pascal*”, utilizando como base as matrizes e vetores desenvolvidos algebricamente. No programa foram criadas três classes de elementos, classe Nós, classe Elementos e classe Estrutura, cada uma responsável em atribuir e calcular as características dos objetos oriundos destas classes. Foi desenvolvida também uma interface amigável para entrada de dados e visualização de resultados, com tabelas, representação gráfica da estrutura e diagramas de esforços internos.

## Resultados e Discussão

No exemplo a seguir foi simulada uma viga engastada de seção retangular de altura  $h$ , base  $b=0,10\text{m}$ , e comprimento  $L=2,00\text{m}$  sob a qual foi aplicada uma carga distribuída uniformemente. Com ajuda do programa desenvolvido (MEF com a cinemática de Reissner-Mindlin) a deflexão é comparada com a expressão teórica da deflexão de uma viga com a cinemática de Bernoulli-Navier. Esta comparação é feita para duas diferentes relações  $h/L$ :  $1/3$  e  $1/10$ . Nos dois casos a viga era composta pelo mesmo material e carregamento aplicado.

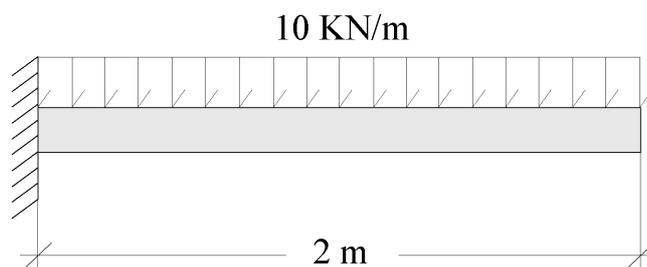


Figura 1: ilustração do carregamento do exemplo.

No diagrama de deslocamentos visto a seguir, a viga tem uma relação  $h/L=1/10$ . A deflexão obtida teórica, usando a cinemática de Bernoulli-Navier, se aproxima da deflexão obtida pelo MEF, que neste caso empregou a cinemática de Reissner-Mindlin.

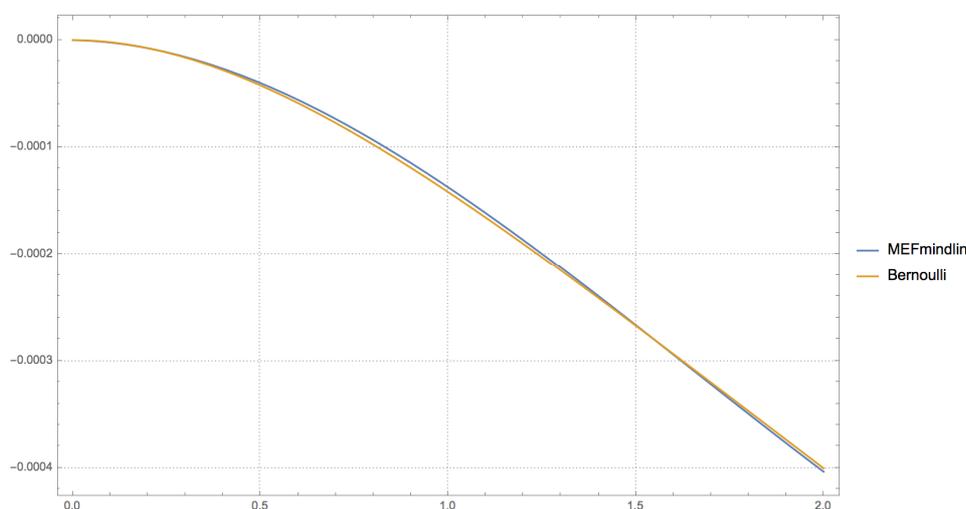


Figura 2: Comparação para a relação  $h/l=10$ .

Desta forma pode-se observar o que já se sabe da literatura que para vigas de pequena relação  $h/L$  tanto o modelo de Bernoulli-Navier como o Modelo de Reissner-Mindlin levam a resultados semelhantes mesmo empregando cinemáticas diferentes.

Para a relação  $h/L=3$ , a deformação obtida pelo MEF (Reissner-Mindlin) se distancia da deformação obtida pelo modelo teórico de Bernoulli-Navier como se pode observar no diagrama a seguir.

Esta diferença se deve ao fato de que para relações  $h/L$  maiores, o modelo de Bernoulli-Navier não é apropriado pois impõe que as seções permaneçam ortogonais a linha neutra após a deformação o que desta forma impõe uma rigidez a mais à estrutura levando a deslocamentos menores do que os reais.

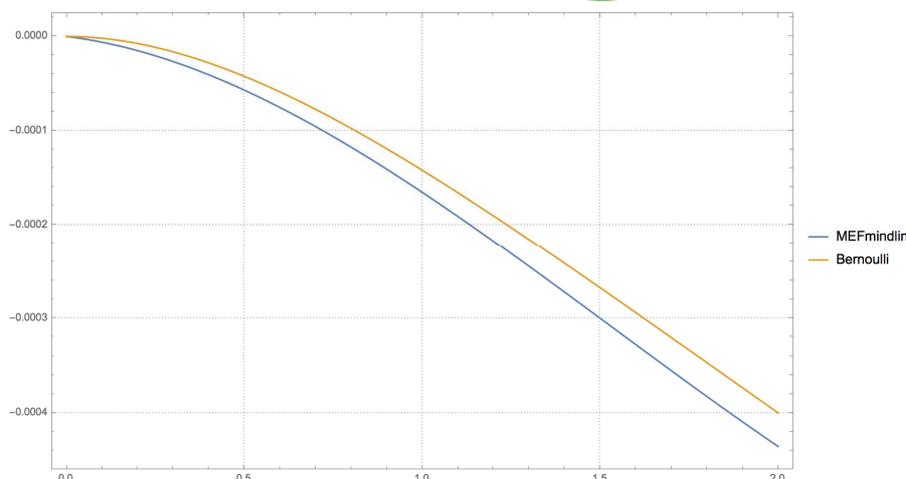


Figura 3: Comparação para a relação  $h/l=10$ .

### Conclusões

Como se pode observar nos resultados apresentados a cinemática de Reissner-Mindlin leva a deslocamentos maiores e mais próximos dos deslocamentos reais da estrutura do que a de Bernoulli-Navier, principalmente para vigas cuja relação  $h/L$  é maior, como é o caso de vigas-parede. O emprego da cinemática apropriada para o caso a ser simulado é fundamental principalmente para a correta estimativa da deflexão do elemento.

O emprego de uma linguagem moderna e orientada a objeto auxilia na organização do código evitando assim erros de implementação.

### Referências

MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates, **Journal of Applied Mechanics** 18 (1951), 31–38.

PACCOLA, R. R. (2001). **Estudo de formulações de placas laminadas apoiadas sobre base elástica**. Campinas. (Discertação de Mestrado) - Departamento de Estruturas, UNICAMP. 139 p.

PACCOLA, R. R. (2004). **Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástico através da combinação entre o MEC e o MEF**. São Carlos. (Tese de Doutorado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC/USP. 190 p.

REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, **Journal of Applied Mechanics** 12 (1945), 69–76.

TIMOSHENKO, S. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, **Philosophical Magazine** 41 (1921), 744–746.