IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM OBJECT PASCAL NA ANÁLISE DE VIGAS EM REGIME ELÁSTICO LINEAR SUBMETIDAS À FLEXÃO

Leonardo Caloi Santos (PIC/Uem), e-mail: santos.leonardocaloi@gmail.com,
Bruno Tolardo de Lira (PIC/Uem), e-mail: brunotolardo@outlook.com,
Wilson Wesley Wutzow (Orientador), e-mail: wwwutzow@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Tecnologia / Maringá, PR.

Área: Engenharia Civil, Subárea: Estruturas

Palavras-chave: métodos numéricos, método dos elementos finitos, implementação computacional.

Resumo:

O uso de ferramentas numéricas destinadas à previsão do comportamento de elementos estruturais sob diferentes condições de solicitação, vem sendo, ao longo dos últimos anos, cada vez mais utilizado por profissionais da área de projetos estruturais e estudado por pesquisadores do mundo acadêmico. Isto se deve, sobretudo, ao fato destes programas proporcionarem uma ampla gama de análises possíveis de serem efetuadas, as quais podem incluir problemas de grande complexidade como, por exemplo, o caso de estruturas sob regime não-linear.
Atualmente, a maioria destes programas de cálculo é baseada no método dos elementos finitos (MEF), haja vista que tem seu funcionamento fundamentado na divisão da geometria de um problema estrutural em elementos finitos, os quais sempre possuem as mesmas funções de forma atreladas às incógnitas nodais. Que no caso das análises de problemas estruturais tais incógnitas nodais são normalmente os deslocamentos.
Pretende-se neste trabalho desenvolver um programa de elementos finitos para análise de vigas submetidas à flexão de elementos elásticos lineares isotrópicos e homogêneos.

Introdução

A utilização de métodos computacionais na análise estrutural é uma atividade relativamente antiga e remonta os anos 1960. Tal como ocorreu com a mecânica dos fluidos o Método das Diferenças Finitas teve grande impulso no início dos desenvolvimentos computacionais, porém com o tempo, o MEF (Método dos elementos finitos) se destacou como alternativa viável e mais versátil para a solução de problemas de análise estrutural (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000).
A formulação fraca em elementos finitos, para a equação do movimento da mecânica dos sólidos, pode ser facilmente obtida a partir da aplicação do

método dos resíduos ponderados, ou através de uma forma variacional, minimizando-se o funcional de energia potencial total (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000; ASSAN, 2003), que é a forma mais comum na mecânica dos sólidos computacional e evita complicações que podem surgir em situações específicas com a aplicação do método de Galerkin, conforme mostrado por (STRANG e FIX, 2008).
O MEF se desenvolveu de forma tão efetiva na mecânica dos sólidos que hoje, apesar de existirem técnicas alternativas de análise estrutural, este é o método mais difundido nesse contexto.

Materiais e métodos

No cálculo estrutural, para o dimensionamento e análise de esforços, cada vez mais tem-se empregado ferramentas computacionais pois além de agilizarem o processo permitem uma análise mais precisa minimizando possíveis erros de ordem humana, bem como propiciando a aplicação de modelos mais complexos.
A formulação a ser estudada neste projeto é largamente empregada no estudo de problemas elásticos lineares de vigas submetidas à flexão. A simplicidade desta formulação e a qualidade dos resultados obtidos pelos pesquisadores que tem empregado esta técnica justificam a intensão deste trabalho em emprega-la. Bem como a oportunidade gerada ao aluno de entrar em contato com o método dos elementos finitos.
O método dos elementos finitos está hoje completamente agregado às atividades do engenheiro, de modo que seu aprendizado é essencial para que se possa lidar com lucidez com os programas comerciais disponíveis em quase todos os escritórios de projetos (ASSAN, 2003).
Desenvolveu-se com este trabalho um programa de elementos finitos elástico linear isotrópico de vigas.
Foi implementado um programa em Object Pascal para a solução do problema, o programa foi separado em 3 classes principais: nós, elementos e estrutura.
A classe de nós associa os dados de entrada aos nós da estrutura.
A classe elementos é responsável em armazenar as características do elemento finito, como coordenadas dos nós, momento de inércia, carregamento aplicado, entre outros. Também são declarados, no construtor da classe, os procedimentos para o cálculo do comprimento do elemento, matriz de rigidez e o vetor de forças.
A classe de estrutura associa os dados das classes citadas à estrutura. No construtor desta classe são atribuídos os valores dos dados já calculados nas classes anteriores às respectivas variáveis desta classe e executados os cálculos que resultam a matriz de rigidez global da estrutura, vetor de forças global da estrutura, deslocamentos verticais da estrutura, esforços internos e reações de apoio.

Resultados e Discussão

Será abordado um exemplo com um estudo discreto dos elementos finitos. O objetivo desta sessão é comparar a precisão do MEF em função do número de elementos quanto à deflexão. Para isso, resolveu-se o mesmo problema com 3 discretizações diferentes: 1, 2 e 5 elementos. A deflexão encontrada com as 3 discretizações foi comparada com a deflexão teórica (modelo de Bernoulli-Navier), em seguida, calculada a diferença absoluta e o desvio percentual, com o objetivo de analisar a influência da discretização adotada (para o elemento implementado) na precisão do resultado obtido.
A viga simulada trata-se de uma viga engastada com carga distribuída uniforme cujas propriedades físicas e geométricas adotas levam a EI=50000 KN/m^2. As condições de contorno bem como carregamento aplicado podem ser observados na figura a seguir:

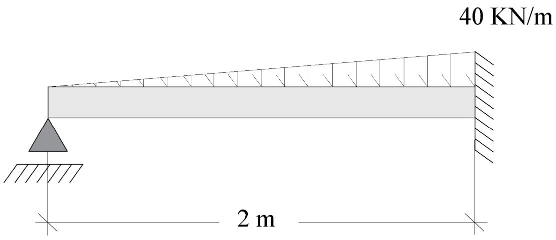

Figura 1: ilustração do carregamento e vinculações do exemplo.

Para resolver este problema pelo método da energia, foi aplicada a minimização do funcional da energia da equação de Euler-Lagrange que resultou em

$$EI\frac{d^4v}{dx^4}\text{-}q = 0$$

Que é uma equação diferencial ordinária (EDO) de 4ª ordem, cuja solução, dadas as condições de contorno e os dados físicos do exemplo, resulta em:

$$v(x) = \text{-}\frac{x}{300000}(\text{-}4 + x^2)^2$$

No programa implementado o Elemento Finito adotado segue a mesma cinemática e mesmo funcional. Contudo devido à aproximação adotada para o Elemento Finito implementado, neste caso cúbica em deflexão, ser insuficiente para representar apropriadamente o problema, diversas discretizações foram empregadas afim de se obter uma simulação mais próxima da necessária para descrever o problema simulado.
A Figura 2 contém os gráficos gerados a partir dos dados extraídos do programa, onde a curva em pontilhada em cor magenta representa a solução teórica e as curvas aproximadoras do elemento finito são representadas em traço contínuo nas cores preta e amarela, intercalando-as para melhor visualização.

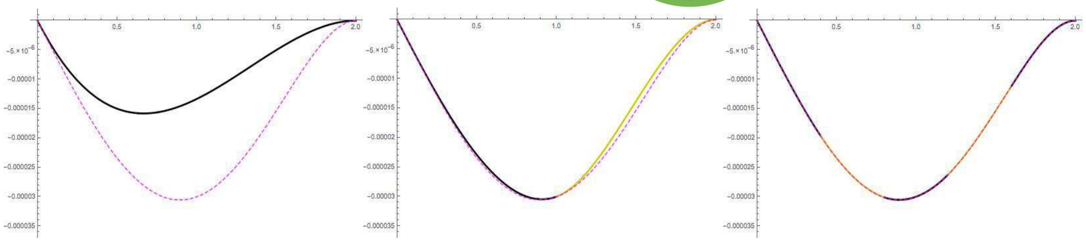

Figura 2 – gráficos comparativos de 1, 2 e 5 elementos finitos, respectivamente.

A tabela 1 contém os dados estatísticos comparativos entre o método computacional com o teórico. Como pode-se observar na tabela 1, fica claro que quanto maior o número de elementos finitos, maior a precisão dos resultados.

Tabela 1 – dados comparativos entre as análises do exemplo.

	Função deflexão	
N de elementos	Desvio	Diferença
1	41.91317%	8.0800E-06
2	4.99488%	5.0500E-07
5	0.30565%	1.2928E-08

Conclusões

Observando-se os resultados obtidos, pode-se concluir que o número de elementos finitos no qual a estrutura é dividida tem grande influência na qualidade dos resultados. Contudo a adoção de um número excessivo de elementos não levaria a um resultado expressivamente melhor, ou seja, para um erro admitido, existe uma discretização ideal acima da qual pouco se ganharia com a adoção mais elementos finitos tendo em vista que isso traria também um custo computacional elevado.

Referências

ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos --- Primeiros Passos**. Campinas, SP, Brasil: Editora Unicamp, 2003. 298.

STRANG, G.; FIX, G. **An analysis of the Finite Element Method.** Wesley---Cambridge Press, 2008.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**, v1: The Basis. Butterworth--- Heinemann Linacre house, 2000. 689