Conjuntos Ordenados e reticulados.

Amanda Caroline Gonçalves Paschoal (PIBIC/CNPq/FA/UEM), Rosali Brusamarello (Orientadora), e-mail: brusama@uem.br

Universidade Estadual de Maringá/Centro de Ciências Exatas/ Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra/Matemática

Palavras-chave: conjuntos ordenados, reticulados, álgebras

Resumo:

Neste projeto, relacionaremos a estrutura dos conjuntos parcialmente ordenados e reticulados, com a estrutura de álgebras de incidência e álgebras Booleanas.

Introdução

O estudo de conjuntos ordenados vem sendo utilizado a décadas dentro das teorias de reticulados e da teoria de grafos. A conexão de conjuntos parcialmente ordenados com álgebras foi iniciada por G.C.Rota em 1964.
A cada conjunto parcialmente ordenado (poset) podemos associar uma álgebra de matrizes, chamadas *matrizes estruturais* (esta álgebra é também chamada *álgebra de incidência*). O estudo da estrutura algébrica destas álgebras auxilia no estudo da estrutura dos posets.
Os reticulados são casos especiais de conjuntos parcialmente ordenados e nestes conjuntos podemos definir duas operações: a união ($\vee$) e a conjunção ($\wedge$). Se todo elemento do reticulado possui complemento e ainda possui a propriedade distributiva, então o reticulado possui uma estrutura de álgebra Booleana. Veremos também que toda álgebra Booleana pode ser vista como um reticulado.

Materiais e Métodos

Por se tratar de um projeto de pesquisa básica, a metodologia empregada consiste de pesquisas bibliográficas, estudo do material coletado, apresentação de seminários e discussão do tema abordado.

Resultados e Discussão

Nossos primeiros resultados foram sobre as relações entre conjuntos parcialmente ordenados e álgebras de incidência. Para entendermos essa relação, iniciaremos definindo estes entes matemáticos.

Definição: *Um conjunto parcialmente ordenado* (ou *poset*) é um par ordenado $(\mathbb{P}, \leq)$ de um conjunto $\mathbb{P}$ e uma relação binária $\leq$ em $\mathbb{P}$ que seja reflexiva, transitiva e antissimétrica, chamada de ordem de $\mathbb{P}$.

O conjunto dos números naturais, dos números inteiros, dos números racionais e dos números reais, com suas habituais ordens são exemplos de conjuntos parcialmente ordenados.

Utilizando a teoria de grafos, definimos o diagrama de Hasse de cada poset, que é uma forma visual de entendermos um poset.

Definição: A *álgebra de incidência* $I(X,R)$ do conjunto localmente finito parcialmente ordenado X sobre o anel comutativo R é:

$$I(X,R) = \{f : X \times X \to R \mid f(x,y) = 0 \text{ se } x \nleq y\}$$

Com as seguintes operações

$$1. (f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$$

$$2. (f.g)(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z) \cdot g(z,y)$$

$$3. (r.f)(x,y) = r.f(x,y),$$

para $f, g \in I(X,R)$ com $r \in R$ e $x, y, z \in X$.

Um dos primeiros resultados que provamos foi que as álgebras de incidência, como definidas acima, são isomorfas a uma subálgebra da álgebra de matrizes. Vimos, por exemplo, que quando $X = \{1, \ldots, n\}$, com a ordem dos números naturais, então $I(X,R)$ é isomorfa a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem *n*.

Na sequência, estudamos algumas propriedades algébricas das álgebras de incidência e suas relações com os posets, conforme (SCHROEDER, B. S. W., 2003) e (SPIEGEL, E.; O'DONNELL, C. J.,1997).

Já o conceito de reticulados envolve a definição de supremo e ínfimo de um conjunto ordenado X, que diz que em um subconjunto X limitado superiormente de um conjunto parcialmente ordenado P, um elemento $b \in P$ será chamado de *supremo* do conjunto X, quando b é a menor das cotas superiores. A definição de *ínfimo* do conjunto X é análoga.

Definição: Um sistema parcialmente ordenado será dito um *reticulado* se nele existir o supremo e o ínfimo do subconjunto formado por qualquer par de seus elementos.

Sendo R um reticulado, podemos definir em R duas operações: para $a, b \in R$

$$\vee : (a,b) \to a \vee b = \sup\{a,b\} \quad \text{e} \quad \wedge : (a,b) \to a \wedge b = \inf\{a,b\}$$

Estas operações darão a R uma estrutura de álgebra Booleana.
Definiremos as álgebras Booleanas a partir de axiomas (postulados) elaborados por Huntington em 1904, que são:

Axioma 1 (A1): Existe um conjunto A, sujeito a uma relação de equivalência denotada por $=$, que satisfaz o princípio da substituição.
Axioma 2 (A2): Há duas operações binárias, $+$ e $\cdot$, definidas em A, tais que $x+y$ e $x \cdot y$ estão em A, sempre que x e y estão em A.
Axioma 3 (A3): As operações $+$ e $\cdot$ são comutativas.
Axioma 4 (A4): Cada operação é distributiva em relação a outra.
Axioma 5 (A5): Existem em A elementos identidade 0 e 1, isto é, para todo $x, y \in A$ temos: $x+0=x$ e $x \cdot 1 = x$.
Axioma 6 (A6) Para cada $x \in A$ existe $\overline{x}$ tal que $x+\overline{x}=0$ e $x.\overline{x}=1$, chamado *complemento* de x.

Ao conjunto A com as operações $+$ e $\cdot$ que satisfaça os axiomas acima, damos o nome de *álgebra Booleana* e denotamos $< A, +, \cdot, -, 0, 1 >$.

Os resultados a seguir mostram a relação estreita entre os reticulados e as álgebras Booleanas.

Teorema: *Toda álgebra Booleana* $< A, +, \cdot, -, 0, 1 >$ *é um reticulado*.

Teorema: *Um reticulado* $(A, \leq)$ *distributivo e complementado é um álgebra Booleana.*

Nos baseamos em (LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M., 2004) e (MORGADO, J.,1962) para o estudo de reticulado e álgebras Booleanas.

Conclusões

Com o seguinte trabalho, pudemos perceber que entes matemáticos, aparentemente distintos, se unem a fim de construir uma nova estrutura e que esta conexão pode auxiliar para aprofundar o estudo destes entes matemáticos.
Com isso, pudemos compreender a importância de relacionar conteúdos a fim de facilitar a resolução de problemas.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por me dar saúde e força, a minha família, a minha orientadora e ao CNPq pela bolsa de estudos.

Referências

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M., **Matemática Discreta**: Coleção Schaum, Bookman, 2004.

MORGADO, J., **Introdução à Teoria dos Reticulados** - Vol. I. Textos de Matemática n◦ 10. Recife: Instituto de Física e Matemática - Universidade do Recife, 1962.

SCHROEDER, B. S. W., **Ordered Sets: An Introduction**. Boston-Basel-Berlim: Birkhauser, 2003.

SPIEGEL, E.; O'DONNELL, C. J., **Incidence Algebras.** New York-basel-hong Kong: Marcel Dekker, Inc, 1997.