INTRODUÇÃO ÀS FRAÇÕES CONTÍNUAS

Christian José Santos Gonçalves (PIC/UEM), Fernanda Diniz de Melo (Orientador), e-mail: fdmelo@yahoo.com.br.

Universidade Estadual de Maringá/Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra/ Matemática

Palavras-chave: racionais, aproximar, irracionais

Resumo

Nesta apresentação temos por objetivo principal apresentar um método para aproximar números reais por meio de números racionais. Iniciaremos definindo uma fração contínua e demonstraremos quais relações há entre as frações finitas e infinitas. Apresentaremos uma recursão, que, a priori, define uma fração contínua de um determinado número real.

Posteriormente, demonstraremos alguns resultados sobre convergentes de uma fração contínua. De modo geral, um convergente é um truncamento da fração contínua. O objetivo é demonstrar que o limite do i-ésimo convergente $c_i = \frac{p_i}{q_i}$, é o número irracional expresso pela fração contínua. Além disso, iremos mostrar que os i-ésimos convergentes pares formam uma sequência não decrescente e os ímpares uma sequência não crescente. Um dos nossos objetivos principais é demonstrar que para todo irracional α, qualquer convergente de α satisfaz a desigualdade $\left|\alpha - c_i\right| < \frac{1}{q_i^{\ 2}}$. Mais precisamente, mostraremos que existem infinitas aproximações cujo erro é menor que o inverso do quadrado do denominador da i-ésima aproximação racional.

Introdução

As frações contínuas são essenciais na solução de muitos problemas relacionados à aproximação racional de números irracionais, aproximações de funções, construção de calendários, equações diofantinas (equação de Pell, por exemplo), é essencial na teoria das aproximações diofantinas (uma excelente exposição pode ser vista em Martinez, 2011), entre outras aplicações na física teórica (mais especificamente em sistemas dinâmicos).

Dado $x \in$ R, a parte inteira de x é o único inteiro $\lfloor x \rfloor$ tal que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. A parte fracionaria de x é o número real $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor \in [0,1)$.

Definimos recursivamente

$$\alpha_0 := x, a_n := \lfloor \alpha_n \rfloor \forall\, n \in N$$

$$\text{e, se } \alpha_n \notin Z, \alpha_{n+1} := \frac{1}{\alpha_n - a_n} = \{\alpha_n\}^{-1}, \text{ para todo } n \in N\,.$$

Se para algum $n \in N, a_n = \alpha_n$ temos

$$x = \alpha_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} := [a_0; a_1, a_2 ..., a_n].$$

Se, $\forall\, n \in N, a_n \neq \alpha_n$, definimos

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}} := [a_0; a_1, a_2 ...].$$

A representação acima se chama a representação por frações contínuas de x. Essa notação é especialmente indicada para denotar a fração contínua de x.

Um número real α é dito ser aproximável na ordem *n* por racionais $\frac{p}{q}$ se existirem uma constante c>0 e uma sucessão $\{p_i/q_i\}$ de racionais distintos, com $q_j > 0$ e $mdc(p_j, q_j) = 1$ tais que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{c}{q_j^{\,n}}$$

Logo a ordem de convergência de todo número irracional é pelo menos 2, isto é, existem infinitos racionais tais que,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^m} \text{ onde } m \geq 2.$$

Materiais e métodos

O projeto foi desenvolvido por meio de pesquisas bibliográficas e apresentações de seminários semanais ao orientador a fim de expor os resultados obtidos e de esclarecer possíveis dúvidas.

Resultados e Discussão

O objetivo aqui era apresentar uma aproximação de números reais por meio de números racionais. Vimos que a representação de números irracionais por frações contínuas é dada por uma simples forma recursiva. Além disso, também fornece aproximações racionais surpreendentemente boas o que pode ser constatado no seguinte resultado.

<u>Teorema:</u> (Teorema de Dirichlet) Seja α um número irracional. Existem infinitos números racionais da forma p/q, tais que $(p,q) = 1$ e $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$.

Também observamos que as frações contínuas possuem outras boas aplicações como a construção de calendários (esta exposição pode ser vista em Bracciali, 2016)

Conclusões

Neste projeto, procuramos estudar alguns tópicos da teoria elementar dos números, dentre eles, a teoria das frações contínuas. Neste estudo vimos que esta teoria está diretamente relacionada à aproximações racionais de números irracionais, sobretudo na área das aproximações diofantinas. Basicamente é uma subárea da teoria dos números.

O objetivo principal é encontrar um número racional irredutível que melhor aproxime um número real dado, colocando restrições sobre o denominador. Em geral, denominadores “muito grandes” não dão boas aproximações do que racionais com denominadores pequenos aproximando o número desejado. Já os racionais que vem da fração contínua, são sempre aproximações espetacularmente boas.

Agradecimentos

Agradeço à professora Fernanda Diniz de Melo Hernandez, pela orientação, paciência e incentivos.

Referências

MARTINEZ, F. B.; et al. **Teoria dos números: Um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro.** 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

BRACCIALI. C. XXVI Semana da Matemática, 2016, Maringá. **Frações contínuas e a construção de calendário**. Universidade Estadual de Maringá, 2016. Disponível em: <https://sites.google.com/site/xxvisemat/programacao/palestras>. Acesso em: 20 mai. 2016.