# CÁLCULO DAS VARIAÇÕES E APLICAÇÕES

Joyce Dias Muraroto (PIBIC/CNPq/UEM), Fábio Matheus Amorin Natali (Orientador), e-mail: fmanatali@uem.br; Josiane Cristina de Oliveira Faria (Coorientadora), e-mail: jcofaria@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Departamento de Matemática / Maringá, PR.

**Ciências Exatas e da Terra – Matemática – Análise.**

**Palavras-chave:** Cálculo das Variações, otimização, equação de Euler-Lagrange.

## Resumo:

Este projeto de pesquisa visa à sistematização do conhecimento matemático para o acadêmico na área de análise matemática, com o intuito de estudar alguns resultados e aplicações elementares do cálculo das variações.

## Introdução

Os problemas matemáticos que idealizam nossos problemas cotidianos são, em geral, bem mais atrativos que outros problemas matemáticos. Por exemplo, existem inúmeras situações cotidianas nas quais queremos comprar um objeto com o menor preço possível, realizar o máximo de trabalho num determinado tempo, alcançar um objetivo realizando o menor esforço. De maneira análoga, encontramos na natureza fenômenos também descritos por princípios de máximos e mínimos. Para a resolução de tais problemas, buscam-se estratégias capazes de determinar as melhores configurações para a construção ou o funcionamento de tais sistemas.

O Cálculo das Variações tem como objetivo desenvolver técnicas matemáticas para encontrar e descrever objetos matemáticos que otimizam uma situação. Para que os objetivos do projeto fossem cumpridos, foram estudados os conceitos de primeira e segunda variação de um funcional $J$, no intuito de determinar seus valores máximo e mínimo. A seguir, foi estudado o problema variacional mais simples, onde foi deduzida a Equação de Euler.

No tocante às aplicações, destacamos o estudo das aplicações físicas, onde se encontram o problema da Braquistócrona e a Ótica Geométrica. Todos estes conceitos foram abordados sob o ponto de vista analítico, dando sempre ênfase ao rigor matemático.

## Materiais e métodos

A metodologia utilizada no desenvolvimento deste projeto baseou-se no método hipotético-dedutivo, no qual, a partir do estudo individual dos tópicos relacionados no plano de trabalho, foram realizados vários encontros onde foi apresentada a evolução do trabalho e eventuais dúvidas expostas ao orientador, em seminários semanais. Os estudos realizados basearam-se principalmente nos textos de Aragon [1] e Rousseau [2].

## Resultados e Discussão

O problema mais simples do cálculo variacional consiste na extremização do funcional $J(y) = \int_b^a F(x,y,y')\,dx$ na classe $C^1$ [a, b] com y(a) = A e y(b) = B , A e B números reais dados e F contínua com derivadas de primeira e segunda ordens contínuas. As hipóteses sobre F garantem a existência da primeira e segunda variação.

Considere a Equação de Euler, dada pela seguinte expressão $F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y') = 0$. Temos o seguinte resultado:

**Proposição 1:** A Equação de Euler representa uma condição necessária para que y seja extremante do funcional.

Dependendo da função da função $F(x,y,y')$ envolvida em cada problema específico, a Equação de Euler, pode tomar formas mais simples. Estudamos 5 casos:

i) F não depende de $y_0$.
A equação de Euler fica reduzida a $F_y(x,y) = 0$, e nesse caso geralmente não existe solução para o problema variacional, uma vez que a equação acima não envolve constantes arbitrárias suficientes para que as condições de contorno sejam satisfeitas.

ii) F depende linearmente de $y_0$.
Supondo que F se escreva como $F(x,y,y') = G(x,y) + H(x,y)y'$, assim, a Equação de Euler toma a forma $\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x} = 0$. No entanto, a curva dada por esta equação não satisfaz, em geral as condições de contorno, e consequentemente, o problema pode não ter solução na classe das funções contínuas.

iii) F depende somente de y'.
Neste caso, a equação de Euler tem a forma $F_{y'y'}y'' = 0$. Este caso está analisado no primeiro. Assim os extremantes para tais funcionais são retas.

iv) F não depende de y.
A equação de Euler fica reduzida a $\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y') = 0$.

v) F não depende de x.
A equação de Euler tem a forma $F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$, que multiplicada por y' se torna $F - y'F_{y'} = k$, onde k é uma constante.

Uma das aplicações físicas estudadas foi o Problema da Braquistócrona, que consiste em se determinar a curva que une dois pontos A e B, não situados na mesma reta vertical, através da qual, uma partícula se desloca de A até B, somente sob a ação da gravidade, no menor tempo possível.

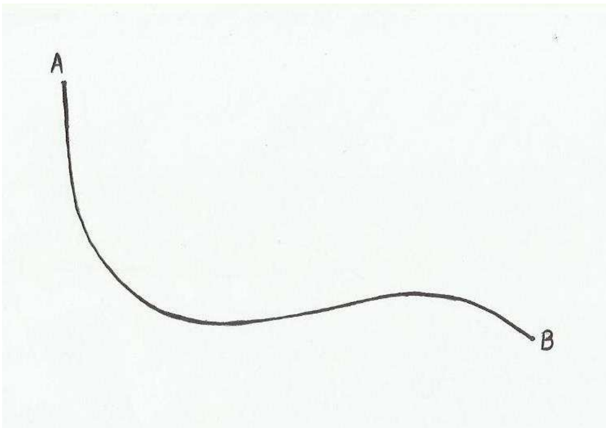


**Figura 1:** O problema da Braquistócrona

A solução deste problema foi dada por J. Bernoulli, I. Bernoulli, G. Bernoulli e I. Newton. A curva que dá o tempo mínimo para o movimento da partícula é uma cicloide.

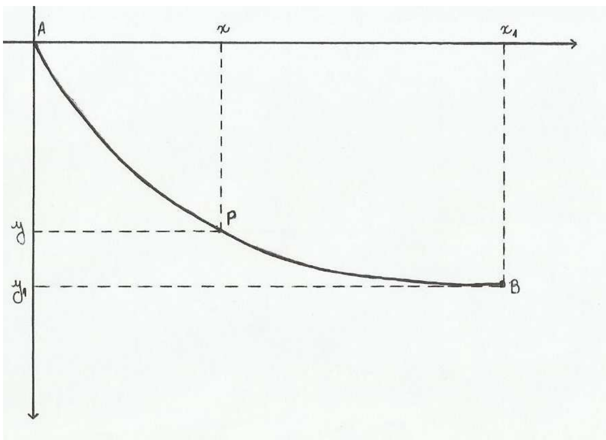


**Figura 2:** O problema da Braquistócrona - cicloide

## Conclusões

O objetivo deste projeto de Iniciação Científica foi o de realizar um estudo inicial e sistemático do Cálculo Variacional, dando enfoque às aplicações físicas, as quais nos permitem ter uma visão mais ampla do que ocorre em ambientes não especificamente matemáticos. Esta é uma abordagem muito comum no contexto da Análise Matemática, a qual poderá ser utilizada em estudos futuros.

## Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro e a UEM pela infraestrutura.

## Referências

[1] ARAGON, F. F. **Cálculo Variacional e Aplicações**. 1980. 146f. Dissertação (Mestrado)– Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1980.

[2] ROUSSEAU, C. e SAINT-AUBIN, Y. **Matemática e Atualidade – Vol. 2.** Rio de Janeiro: SBM, 2016.