TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E APLICAÇÕES

Stefane Miranda Novaes (PIC\UEM), Welinton Anderson Rocha (PIC\UEM), Josiane Cristina de Oliveira (Orientadora), e-mail: jcofaria@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Depart. De Matemática / Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra - Matemática – Análise

Palavras-chave: espaços métricos, Teorema do ponto fixo, aplicações.

Resumo

Este projeto de pesquisa visa à sistematização do conhecimento matemático para um discente do Programa de Educação Tutorial (PET- Matemática/ UEM), com o intuito de introduzir conceitos básicos de espaços métricos, culminando com o estudo do Teorema do Ponto Fixo de Banach, com vistas ao estudo de aplicações no contexto das equações diferenciais. Tais conceitos serão abordados sob o ponto de vista analítico, dando sempre ênfase ao rigor matemático.

Introdução

Alguns fenômenos que ocorrem no mundo onde vivemos muitas vezes são descritos por equações diferenciais, por exemplo fenômenos naturais, peste em plantações, entre outros acontecimentos. Podemos dizer que existem dois principais tipos de diferenciais, são elas as parciais e as ordinárias. Nossos estudos foram focados em verificar se existe uma e é única a solução para equações da forma

$$\frac{dy}{dx} = y(x).$$

Em algumas situações não é necessário conhecer a fórmula algébrica da solução da equação. Pensando nisso que desenvolvemos este projeto com intuito de estudar o teorema de existência e unicidade.

Materiais e métodos

Os estudos se iniciaram com o estudo de conceitos topológicos, na reta, seguindo a referência bibliográfica [01]. A metodologia utilizada foi a de estudos individuais e em duplas dos integrantes do projeto com uma reunião semanal de ambos com a orientadora para a discussão do que foi estudado. No decorrer do projeto estendemos estes conceitos para espaços métricos, culminando no estudo do teorema do ponto fixo de Banach, tomando como bases as referências [02] e [03]. Por fim, aplicamos tais conceitos no estudo das equações diferenciais ordinárias, particularmente na demonstração do Teorema de Cauchy, seguindo as referências [04] e [05].

Resultados e Discussão

Seja *M* um espaço métrico. Uma sequência (x_n) de *M* com a propriedade abaixo

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \ tal \ \ que \ \ m,n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

é chamada de sequência de Cauchy. Se toda sequência de Cauchy convergir em M, dizemos que M é um espaço métrico completo. Foram de suma importância em nossos estudos as funções contínuas denominadas contrações, i.e., aplicações $f : M \to N$ onde existe $0 < c < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) < cd(x,y) \ \ x, y \in M \ .$$

O teorema do ponto fixo de Banach para contrações, enunciado a seguir, de fato nos remete à importância de tais funções em nossa abordagem.

<u>Teorema do ponto fixo de Banach</u>:" Se M é um espaço métrico completo, toda aplicação $f : M \to M$ possui um único ponto fixo em M. Mais precisamente, se escolhermos um ponto $x_0 \in M$ e pusermos $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots$ a sequência (x_n) converge em M e $\lim x_n = a$ é o ponto fixo de f."

Esse teorema é uma ferramenta fundamental na demonstração do teorema de Cauchy, referente a Existência e Unicidade de solução de equações diferenciais ordinárias. Ele afirma que, sob certas hipóteses é possível se garantir a existência e unicidade de equações do tipo $\frac{dy}{dx} = y(x)$.

Conclusões

Através do desenvolvimento deste projeto foi possível observar a importância da área de análise matemática e suas ferramentas para validar e aprofundar os resultados estudados. A teoria desenvolvida serviu como fundamentação para um estudo analítico das equações diferenciais ordinárias, no qual foi possível garantir além da existência, a unicidade de soluções em determinados tipos de equações.

Agradecimentos

Agradecemos à Universidade Estadual de Maringá e ao projeto PET Matemática-UEM pelo apoio estrutural e financeiro para o desenvolvimento deste projeto de iniciação científica.

Referências

[01]Cavalcanti, M. M. **Tópicos de Análise Matemática.** Maringá, 1989.

[02] DOMINGUES, H. H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. São Paulo: Atual, 1982.

[03] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Quarta Edição. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2009.

[04] FIGUEIREDO, D. G. e NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. Terceira Edição. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2012.

[05] HONIG, C. S. **Aplicações da Topologia à Análise**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 1976.