

ALGORITMO PARA CALCULAR A FUNÇÃO H-FOX

Gabriel de Almeida Montanha (PIBIC/CNPq/FA/UEM), Elvio João Leonardo,
gabrielalmeida.m@gmail.com.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Tecnologia / Maringá, PR.

3.04.06.03-0 – Telecomunicações, Sistemas de Telecomunicações

Palavras-chave: Algoritmo, telecomunicações, softwares

Resumo:

O projeto em questão consiste na implementação de uma rotina computacional para o cálculo da função H-Fox em uma linguagem de programação de altíssimo nível, neste caso foi utilizado o software Mathematica da empresa Wolfram. A função H-Fox ou simplesmente função H é uma generalização da função hipergeométrica (Mathai et al., 2010). A é definida por uma integral do tipo Mellin-Barnes (Costa et al., 2011), a qual é formada por um quociente de produtos de funções gama e um contorno no plano de Argand-Gauss (plano Complexo). A função H pode ser aplicada em várias áreas das ciências exatas e engenharias, especificamente em fenômenos não-lineares, como difusão anômala, teoria de distribuição estatística, astrofísica, cálculo fracionário (Costa, 2011), telecomunicações, etc. A recente utilização da função H para solucionar vários problemas não-lineares vem despertando interesse de cientistas do mundo todo devido a sua precisão e fácil tratamento analítico. Por este motivo surge a necessidade de que seja desenvolvido um algoritmo para o cálculo desta função em softwares com linguagem de programação de alto nível como Python, Mathematica, MATLAB, Maple, R, etc.

Introdução

A procura por explicação e compreensão mais precisa de problemas físicos, biológicos e que aparecem na engenharia, tem feito com que inúmeros pesquisadores mundo afora utilizem ferramentas matemáticas mais rebuscadas. Pelo grau de complexidade que cada problema envolve é justificado o uso de tais ferramentas. A função H pode ser considerada como uma dessas ferramentas, pela facilidade de tratamento analítico da mesma e precisão, facilitando a compreensão de problemas muito complexos envolvendo várias áreas da física-matemática, engenharia, biologia e no estudo dos fenômenos astronômicos. Por isso, o objetivo do projeto é criar um algoritmo para o cálculo da função H com os parâmetros e a variável desejados, o principal embasamento para a realização deste foi o artigo de

(Rathie et al., 2016) onde há um algoritmo na linguagem Mathematica para calcular a função H.

Materiais e métodos

O material utilizado para a realização do projeto foi o software Mathematica/Wolfram. Os métodos utilizados para a construção do algoritmo foram as definições da função H com suas condições de existência e os possíveis contornos da integral, com embasamento em algoritmos construídos para o cálculo da função H em vários softwares matemáticos.

Resultados e Discussão

Os resultados obtidos através do estudo e análise da fundamentação teórica da função H-Fox, e de algoritmos em artigos científicos, foram a elaboração de um algoritmo com uma boa precisão matemática para calcular a função H, podendo ser aferido parâmetros, condições de contorno da integral e a variável complexa. A seguir será colocado um exemplo da utilização da função H em telecomunicações, no qual é feito o cálculo de expressões na forma fechada para as funções densidade de probabilidade (PDF) da relação de envoltórias aleatórias envolvendo as populares distribuições de desvanecimento α - μ , κ - μ e η - μ . Estas distribuições são obtidas em termos da função H com múltiplas variáveis.

Seja a função H dada por:

$$H[\mathbf{x}; (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{B}); (\boldsymbol{\delta}, \mathbf{D}), \mathcal{L}] = \left(\frac{1}{2\pi j} \right)^N \oint_{\mathcal{L}} \Theta(s) \mathbf{x}^{-s} ds$$

onde j é a unidade imaginária, $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_n]$, $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$, $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \dots, \beta_m]$ and $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1, \dots, \delta_n]$ são vetores de números complexos e $\mathbf{B} = (b_{i,j})_{m \times n}$ e $\mathbf{D} = (d_{i,j})_{n \times n}$ são matrizes de números reais, \mathcal{L} é um contorno apropriado no plano complexo e Θ é dado por

$$\Theta(s) = \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma \left(\beta_i + \sum_{k=1}^N b_{i,k} s_k \right)}{\prod_{i=1}^n \Gamma \left(\delta_i + \sum_{k=1}^N d_{i,k} s_k \right)}$$

Neste exemplo, a função densidade de probabilidade (PDF) para as distribuições citadas anteriormente é dada pela função:

$$g(z) = CH[x; (\beta, \mathbf{B}); (\delta, \mathbf{D}), \mathcal{L}]$$

onde C é uma constante, com os demais parâmetros fornecidos pela Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros para a função H das razões das distribuições de desvanecimento α - μ , κ - μ e η - μ

Ratio	C	x	β	B	δ	D
α - μ / α - μ	$\frac{1}{z\Gamma(\mu_x)\Gamma(\mu_y)}$	$\frac{z}{u\alpha_x}$	$[\mu_x, \mu_y]$	$\begin{pmatrix} 1/\alpha_x \\ -1/\alpha_y \end{pmatrix}$	-	-
α - μ / κ - μ	$\frac{\alpha_x}{z\Gamma(\mu_x)e^{\kappa_x\mu_y}}$	$\left(\frac{z}{u\alpha_x}, -\kappa_y\mu_y\right)$	$[\mu_y, \mu_x, 0]$	$\begin{pmatrix} -\alpha_x/2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$[\mu_y]$	$(0 \ -1)$
α - μ / η - μ	$\frac{2^{1-2\mu_y}\sqrt{\pi}\alpha_x}{z\Gamma(\mu_x)\Gamma(\mu_y)H_y^{\mu_y}}$	$\left(\frac{z}{u\alpha_x}, -\frac{H_y^2}{4h_y^2}\right)$	$[2\mu_y, \mu_x, 0]$	$\begin{pmatrix} -\alpha_x/2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$[\mu_y + \frac{1}{2}]$	$(0 \ -1)$
κ - μ / κ - μ	$\frac{2(-\kappa_x\mu_x)^{-\mu_x}(-\kappa_y\mu_y)^{-\mu_y}}{ze^{\kappa_x\mu_x + \kappa_y\mu_y}}$	$[-\kappa_x\mu_x v_{\kappa\kappa}, -\kappa_y\mu_y(1 - v_{\kappa\kappa})]$	$[0, \mu_x, \mu_y]$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$[0, 0]$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
κ - μ / η - μ	$\frac{4\sqrt{\pi}(-1)^{-\mu_x-\mu_y}H_y^{\mu_y}z^{-1}}{\Gamma(\mu_y)e^{\kappa_x\mu_x}(\kappa_x\mu_x)^{\mu_x}(H_y^2)^{\mu_y}}$	$[-\kappa_x\mu_x v_{\kappa\eta}, -\frac{H_y^2}{4h_y^2}(1 - v_{\kappa\eta})^2]$	$[0, \mu_x, \mu_y]$	$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$[0, \frac{1}{2}]$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
η - μ / η - μ	$\frac{8\pi(-1)^{-\mu_x-\mu_y}h_x^{\mu_x}h_y^{\mu_y}}{z\Gamma(\mu_x)\Gamma(\mu_y)(H_x^2)^{\mu_x}(H_y^2)^{\mu_y}}$	$[-\frac{H_x^2 v_{\eta\eta}^2}{4h_x^2}, \frac{H_y^2(1 - v_{\eta\eta})^2}{4h_y^2}]$	$[0, \mu_x, \mu_y]$	$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Colocando os parâmetros como dados de entrada no algoritmo, obteve-se os seguintes gráficos:

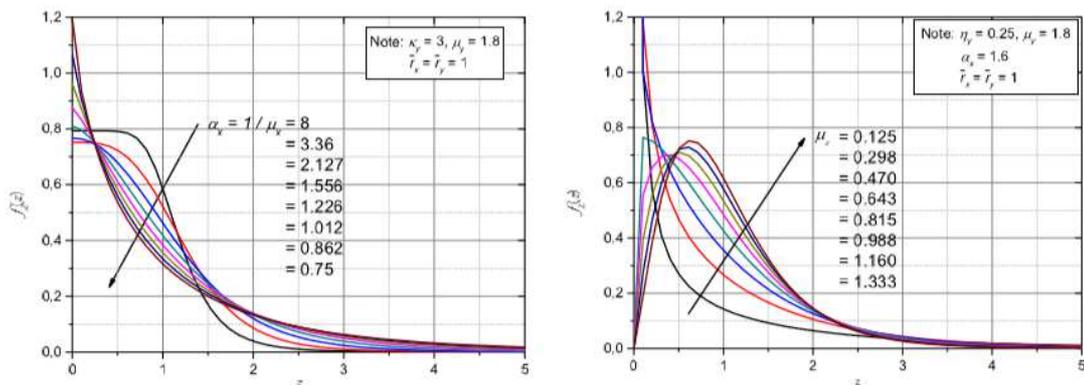


Figura 1 – No primeiro gráfico é obtido a função densidade de probabilidade (PDF) da razão entre as variáveis aleatórias α - μ e κ - μ , com $\mu_y = 1.8$, $\kappa_y = 3$, e vários valores de α_x and μ_x . No segundo gráfico é obtido a função densidade de probabilidade (PDF) da razão entre as variáveis aleatórias α - μ e η - μ , com $\alpha_x = 1.6$, $\mu_y = 1.8$, $\eta_y = 0.25$, e vários valores de μ_x .

Conclusões

A partir deste trabalho, conclui-se que o algoritmo construído possui uma boa precisão matemática e o processamento dos dados de entrada foi

realizado rapidamente. Os maiores desafios foram: inserir um contorno adequado para o cálculo da integral; e a complexidade matemática acerca da função H .

Agradecimentos

Primeiramente, eu agradeço a Deus, por ter me dado o dom da vida, aos meus pais por todo o amor e suporte dados no decorrer de minha vida, à Fundação Araucária e ao CNPq, por ter dado o apoio financeiro para o desenvolvimento deste projeto e à minha filha Sofia, luz da minha vida, motivação de todos os dias.

Referências

A.M. Mathai, R.K. Saxena, H.J. Haubold. **The H function: Theory and Applications**, New York, Springer, 2010.

F. S. Costa. **Função H de Fox e Aplicações no Cálculo Fracionário**. Dissertação (Doutorado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, 2011.

F.S. Costa, et al. **As integrais de Mellin-Barnes e a Função de Fox**, São Carlos SP, TEMA. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, 12, nº2, 157-169 2011.

P.N. Rathie, L.C. de S.M. Ozelim, C.E.G. Otiniano, **Exact distribution of the product and the quotient of two stable Lévy random variables**, Communications in Nonlinear Science and Number Simulation, www.elsevier.com/locate/cnsns, 36, p. 204-218, 2016.