INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA TROPICAL

Rafael de Assis Gracioli (PIBIC/CNPq), Marcelo Escudeiro Hernandes (Orientador), e-mail: mehernandes@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas

Área:10100008 - Matemática, subárea:10101004 - Álgebra

Palavras-chave: álgebra linear, álgebra max-plus, matrizes.

Resumo:

O projeto teve como objetivo estudar e desenvolver os principais conceitos da Álgebra Max-Plus, assunto amplamente utilizado em diversas áreas da matemática, estatística, física, programação linear, controle de tráfego e linhas de produção. Em particular, foi abordado principalmente os aspectos teóricos e as propriedades algébricas do semianel $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, bem como as matrizes com entradas em $\overline{\mathbb{R}}$, suas operações e condições para a existência de inversos de tais matrizes.

Introdução

A Álgebra Max-Plus, ou Álgebra Tropical, aborda basicamente o semianel max-plus que é o conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, munido de duas operações binárias, sendo elas $a \oplus b = \max\{a, b\}$ e $a \otimes b = a + b$, chamadas de adição e multiplicação tropical, cujas identidades são dadas por $-\infty$ e 0 respectivamente. As operações de adição e multiplicação tropical, assim como na álgebra convencional são comutativas e associativas.
A Álgebra Max-Plus, assim como a Min-Plus, é um dos muitos semianeis idempotentes que são aplicados em vários campos da matemática, ela apareceu pela primeira vez em 1956 no artigo de Kleene sobre conjuntos autômatos. Esta álgebra possui aplicações em diversas áreas como combinatória, otimização, física matemática e geometria algébrica, além de ser usada na teoria de controle, programação de máquinas, processos discretos de eventos, sistemas de manufatura, redes de comunicação, processamento paralelo e controle de tráfego. A principal razão para a sua aplicação em diversas áreas é o fato de que as equações utilizadas para descrever o comportamento das aplicações descritas anteriormente são em sua maioria não lineares na álgebra convencional, porém, estas aplicações na Álgebra Tropical se tornam lineares.

Os pesquisadores Cunninghame-Green, Gaubert, Gondran e Minoux estão entre os maiores colaboradores para a construção de grande parte da Álgebra Linear Tropical que temos hoje. Cunninghame-Green, em particular, estudou conceitos como o de resolução de sistemas de equações lineares, autovalores e independência linear segundo a Álgebra Tropical.

Materiais e métodos

O projeto se baseou principalmente na prática de seminários acompanhados pelo orientador realizados semanalmente, com a intenção de abordar assuntos relacionados à Álgebra Tropical, além de sanar as dúvidas e em conjunto com o orientador buscar novos conceitos.

Resultados e Discussão

Durante o desenvolvimento do projeto, abordamos matrizes com entradas em $\overline{\mathbb{R}}$ munidas das operações de adição e multiplicação tropical segundo o enfoque dado em [1]. Uma questão que abordamos, e não foi tratada em [1], foi a caracterização de matrizes que são invertíveis.
Dada uma matriz A quadrada $n \times n$ com entradas em $\overline{\mathbb{R}}$, dizemos que A é invertível e B é sua inversa, se $A \otimes B = I_n$, em que I_n é a matriz quadrada $n \times n$ cujas entradas na diagonal principal é igual a 0 e as demais são todas iguais a $-\infty$.
Com base nisto, constatamos que uma matriz 2×2 é invertível, se, e somente se, uma de suas diagonais é toda igual a $-\infty$, ou seja, a matriz pode ser escrita como:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & -\infty \\ -\infty & b \end{pmatrix},$$

ou

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\infty & c \\ d & -\infty \end{pmatrix}.$$

Além disso, as possíveis inversas de A para os dois casos são:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -a & -\infty \\ -\infty & -b \end{pmatrix},$$

ou

$$B_2 = \begin{pmatrix} -\infty & -c \\ -d & -\infty \end{pmatrix}.$$

Porém, com o avanço do projeto e pesquisa de novas fontes bibliográficas, tivemos acesso ao material [3], em que pudemos encontrar uma generalização dos resultados acima. Mais especificamente, uma matriz A, é invertível, se e somente se, A é uma matriz diagonal permutada, ou seja, existe uma matriz diagonal $D(\lambda_i)$ com entradas na diagonal iguais a $\lambda_i \neq -\infty$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e demais entradas iguais a 0 e P_σ uma matriz permutação, isto é, uma matriz $n \times n$ em que cada linha e coluna possui apenas uma entrada distinta de $-\infty$ e igual a 0. Deste modo, a matriz A pode ser escrita como:

$$A = D(\lambda_i) \otimes P_\sigma,$$

e sua inversa pode ser escrita como:

$$A^{-1} = D(-\lambda_1) \otimes P_{\sigma^{-1}}.$$

Conclusões

Ao término deste projeto, foi concluído que a Álgebra Tropical é amplamente aplicada em diversas áreas, principalmente pela sua flexibilidade de tratar diversos tipos de sistemas, que segundo a álgebra convencional seriam extremamente complexos, mas que se tornam lineares no contexto da adição e multiplicação tropical, facilitando imensamente a abordagem do problema. Além disso, foi possível observar o avanço de resultados da Álgebra Tropical na matemática, permitindo realizar equivalências com os conceitos da álgebra convencional, possibilitando avançar cada vez mais e ampliando sua aplicação e pesquisa em diversas áreas.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao orientador, pelo projeto e experiência, ao CNPq pelo incentivo e pela oportunidade e, por fim a todos que de alguma forma me ajudaram no desenvolvimento deste projeto.

Referências

[1] A. T. BARAVIEIRA e F. M. Branco, **Introdução à Álgebra Max-Plus**, III Colóquio de Matemática da Região Sul, 2014.

[2] E. BRUGALLÉ, **Um pouco de geometria tropical**, Revista Matemática Universitária, 46 (2009) 27-40.

[3] K. FARLOW, **Max-Plus Algebra**, Dissertação de Mestrado, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2009.