

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DOS DOMÍNIOS DE INTEGRIDADE

Nathália Lisandro Toppa (PIC/Uem), Érica Zancanella Fornaroli
(Orientadora), e-mail: nathalialisandro@gmail.com.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Matemática / Álgebra

Palavras-chave: anel, corpo, domínio de integridade.

Resumo:

Neste trabalho realizamos um estudo introdutório sobre domínios de integridade, suas propriedades e exemplos. Para isso, foram estudados anéis e suas propriedades básicas, subanéis e homomorfismos. Também estudamos domínios de integridade e corpos ordenados.

Introdução

Os anéis são considerados um dos principais objetos de estudo na área de Álgebra. O conjunto dos números inteiros com as operações de adição e multiplicação usuais e o conjunto dos polinômios com coeficientes reais com a adição e a multiplicação usuais são exemplos conhecidos de anéis e possuem propriedades muito boas do ponto de vista algébrico. Por exemplo, a operação de multiplicação é comutativa e possui elemento neutro, e o produto de dois elementos não nulos é um elemento não nulo. Essas propriedades caracterizam esses anéis como domínios de integridade. Alguns domínios de integridade podem ser ordenados, ou seja, sobre eles pode ser definida uma relação de ordem total que é compatível com as operações de adição e multiplicação. Neste projeto realizamos um estudo sobre domínios de integridade e domínios de integridade ordenados, algumas de suas propriedades e exemplos.

Materiais e métodos

Durante o desenvolvimento do projeto foram realizadas apresentações de seminários semanais com o objetivo de suprir possíveis dúvidas e apresentar os resultados obtidos durante o estudo semanal. Além disso, foram utilizados como bibliografia duas edições do livro Álgebra Moderna, de Hygino Domingues e Gelson Iezzi.

Resultados e Discussão

Na primeira parte do projeto, os estudos se basearam no conceito de anel e em suas propriedades básicas, subanéis, homomorfismos e característica. Um anel é um conjunto não vazio A munido de duas operações binárias chamadas adição e multiplicação, que satisfazem algumas condições, sendo elas: as duas operações são associativas, a adição é comutativa, existe um elemento neutro com respeito à adição (0_A), todo elemento de A possui um inverso com respeito à adição e a multiplicação é distributiva relativamente à adição. Se a multiplicação é comutativa, A é dito um anel comutativo e se existe um elemento neutro com respeito à multiplicação (1_A) tal que 1_A e 0_A são elementos distintos, A é dito um anel com unidade. Um anel comutativo com unidade D é chamado de domínio de integridade se o produto de quaisquer dois elementos não nulos de D é um elemento não nulo (lei do anulamento do produto). Os conjuntos dos números inteiros \mathbb{Z} , dos números racionais \mathbb{Q} e dos números reais \mathbb{R} são exemplos de domínios de integridade com as operações de adição e multiplicação usuais. Um anel comutativo com unidade K tal que todo elemento não nulo possui inverso multiplicativo é chamado de corpo. Por exemplo, \mathbb{Q} e \mathbb{R} são corpos. Mais geralmente, todo corpo é um domínio de integridade. A recíproca, não é verdadeira. Por exemplo, \mathbb{Z} é um domínio de integridade, mas não é um corpo. Vimos também que todo domínio de integridade D é um subanel de um corpo, o qual é chamado de corpo de frações de D . Por exemplo, o corpo de frações de \mathbb{Z} é \mathbb{Q} .

Posteriormente, estudamos um tipo particular de domínio de integridade sobre o qual está definida uma relação de ordem total que é compatível com as operações de adição e multiplicação de D . Neste caso, D é dito um domínio de integridade ordenado. Vimos algumas propriedades dos domínios de integridade ordenados, bem como condições necessárias e suficientes para que um domínio de integridade seja ordenado. Por exemplo, \mathbb{Z} , \mathbb{Q} e \mathbb{R} são domínios de integridade ordenados. O conjunto dos números complexos \mathbb{C} com as operações usuais é um corpo e, portanto, um domínio de integridade. No entanto, \mathbb{C} não é um domínio de integridade ordenado.

Finalizamos nosso trabalho estudando os anéis de polinômios em uma indeterminada x com coeficientes em um anel comutativo com unidade A , o qual é denotado por $A[x]$. Tais anéis fornecem importantes exemplos de domínios de integridade, pois se A é um domínio de integridade, então $A[x]$ também é. Além disso, o anel de polinômios com coeficientes reais $\mathbb{R}[x]$ é um exemplo de domínio de integridade ordenado.

Conclusões

Neste trabalho estudamos os conceitos de domínios de integridade e domínios de integridade ordenados. Para isso foram introduzidos conceitos básicos sobre anéis e corpos. Sendo assim, concluímos que um domínio de integridade D é um anel comutativo com unidade que satisfaz a lei do anulamento do produto. Além disso, se existe uma relação de ordem total sobre D que é compatível com suas operações, dizemos que D é um

domínio de integridade ordenado. Por exemplo, Z , Q , R e $R[x]$ são domínios de integridade ordenados.

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora pela oportunidade que me deu de ter acesso a novos conceitos que foram importantes e acrescentaram no meu conhecimento matemático.

Referências

DOMINGUES, H. H., IEZZI, G. **Álgebra moderna**. 3. ed. São Paulo: Atual Editora, 1995.

DOMINGUES, H. H., IEZZI, G. **Álgebra moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual Editora, 2003.