EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES CLÁSSICAS E DEPENDÊNCIA CONTÍNUA DOS DADOS INICIAIS PARA PROBLEMAS DE CAUCHY E PROBLEMAS MISTOS

Pedro Gabriel Papa Torelli (PIBIC/CNPq/FA/Uem), Cícero Lopes Frota (Orientador), e-mail: clfrota@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas / Departamento de Matemática / Maringá, PR.

Matemática - Equações Diferenciais Parciais.

Palavras-chave: equações diferenciais parciais, análise de Fourier, Física-Matemática.

Resumo:

Estudamos as três equações clássicas da Física-Matemática, a saber, as equações da onda, do calor e de Laplace. O objetivo principal do estudo é apresentar resultados sobre a existência e unicidade de soluções clássicas, bem como, sobre a dependência contínua dos dados iniciais para os problemas de Cauchy e problemas mistos associados a estas equações.

Introdução:

O conhecimento de Leis da Física deu origem aos modelos responsáveis por descreverem os fenômenos da natureza, que na sua grande maioria estão constituídos por Equações Diferenciais Parciais (EDP). O desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, no século XVII, proporcionou grande avanço ao estudo das EDPs, e neste contexto, têm extrema relevância três tipos de equações, chamadas equações clássicas da Física-Matemática, cujos protótipos são: equação da onda, equação do calor e equação de Laplace. Nosso estudo, fundamentado na Teoria de Fourier (séries e transformadas) e mudança de variáveis, apresenta uma abordagem clássica aos problemas, estabelecendo a solução dos mesmos.

Materiais e Métodos:

De acordo com a metodologia usual na pesquisa em Matemática, foram realizados estudos individuais, principalmente com a bibliografia abaixo, concomitantes a encontros semanais para realização de seminário público para debates a respeito dos resultados atingidos.

Resultados e Discussão:

A situação física que motiva a equação da onda unidimensional em um domínio ilimitado é o estudo das pequenas vibrações de uma corda elástica. Se $u = u(x,t)$ representa o deslocamento do ponto x na corda, no instante de tempo t, então u deve ser solução do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases} \qquad (1)$$

onde $u_0, u_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções dadas. Utilizando mudança de variáveis provamos o teorema:

Teorema 1: Se $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$, então a função

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+at) + u_0(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(s)ds$$

é a única solução clássica do problema (1), a qual depende continuamente dos dados iniciais u_0 e u_1.

A equação da onda em domínio limitado surge quando fisicamente consideramos uma corda de comprimento L, presa nas extremidades, e neste caso temos o problema de valores iniciais e de fronteira (PVIF)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in (0,L), \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x);\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in [0,L], \end{cases} \qquad (2)$$

onde novamente $u_0, u_1 : [0,L] \to \mathbb{R}$ são funções dadas. Após um estudo minucioso sobre a Teoria das Séries de Fourier, utilizando o método de separação de variáveis, estabelecemos o teorema:

Teorema 2: Sejam $u_0 \in C^2([0,L])$ e $u_1 \in C^1([0,L])$ funções tais que $u_0''', u_1'' \in SC([0,L])$ e $u_0(0) = u_0(L) = u_0''(0) = u_0''(L) = u_1(0) = u_1(L) = 0$. Então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi a t}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi a t}{L}\right)\right] sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

com

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad e \quad b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L u_1(x)\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

é a única solução clássica do problema (2), a qual depende continuamente dos dados iniciais.

Estudamos também o fenômeno da difusão de calor num fio condutor de comprimento L, cujas extremidades são mantidas a temperatura constante de 0°C. Se $u = u(x,t)$ é a temperatura no ponto x do fio, no instante de tempo t, então u deve ser solução do PVIF:

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & x \in (0,L), \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,L], \end{cases} \qquad (3)$$

onde k é um número real positivo e $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ é uma função dada que representa a distribuição inicial de temperatura no fio. Com relação ao problema (3) temos o seguinte resultado:

Teorema 3: Seja $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ tal que $f \in C([0,L])$, $f(0) = f(L) = 0$, existe f' em $[0,L]$ e $f' \in \mathcal{L}^2([0,L])$. Então a função

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 kt/L^2} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

sendo

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

é a única solução clássica do PVIF (3).

Estudamos ainda a equação do calor em domínios ilimitados e, neste caso, Transformada de Fourier é a ferramenta efetiva para resolução do problema de Cauchy associado:

$$\begin{cases} u_t = k\, u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{4}$$

que apresentamos no teorema a seguir.

Teorema 4: Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for contínua e limitada, então a função

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4k\pi t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4kt} f(y)dy, & t > 0 \\ f(x) & t = 0. \end{cases}$$

é a única solução clássica de (4), a qual depende continuamente do dado inicial f.

A equação de Laplace está geralmente associada ao estudo do potencial de campos gravitacionais ou à teoria de escoamento de fluidos incompressíveis. Neste caso não há variações com o tempo, ou seja, os problemas são independentes da variável t (tempo) e por isso são ditos estacionários. Tal equação compõe um problema cujo domínio é uma região Ω conexa do plano, que possui uma dada configuração de fronteira. Aqui consideramos dois casos: quando Ω é um retângulo e quando Ω é um disco.

O problema de Dirichlet no retângulo $\Omega = [0,L] \times [0,M]$, para a equação de Laplace, consiste em encontrar uma função $u = u(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x,y) \in \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = f(x,y), \end{cases} \tag{5}$$

onde $f(x,y) = g(x)$, na fronteira inferior de Ω e $f(x,y) = 0$ nos outros casos. Utilizando novamente o método de separação de variáveis concluímos:

Teorema 5: Se $f: \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é como acima e $g \in C([0,L])$ com $g(0) = g(L) = 0$ então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n senh\left[\frac{n\pi(y-M)}{L}\right] sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

com

$$A_n = \frac{a_n}{senh\left[-\frac{n\pi M}{L}\right]} \quad e \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

é a única solução de (5).

Por fim, estudamos o problema de Dirichlet em um disco de raio ρ. Utilizando coordenadas polares transformamos o domínio circular num retângulo Γ e o problema transformado é da forma:

$$\begin{cases} U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta} = 0, & (r,\theta) \in \Gamma \\ U_{|\partial\Gamma} = g(\theta), \end{cases} \tag{6}$$

donde, usando o método de Fourier, obtemos o teorema:

Teorema 6: Se $g: [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ tal que $g \in C([0,L])$ e $g(0) = g(2\pi)$. Então

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \operatorname{sen}(n\theta)],$$

onde

$$a_n = \frac{1}{\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad e \quad b_n = \frac{1}{\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} g(\theta) \operatorname{sen}(n\theta) d\theta$$

é a única solução de (6).

Conclusão:

O desenvolvimento de Teorias Matemáticas é fundamental para se garantir que os problemas clássicos da Física-Matemática são problemas bem postos, ou seja, problemas que possuem solução, a solução é única e depende continuamente dos dados iniciais.

Agradecimentos:

Agradecemos à Universidade Estadual de Maringá e ao CNPq pelo apoio estrutural e financeiro para o desenvolvimento desta pesquisa de iniciação científica.

Referências:

[1] BLEECKER, D.; CSORDAS, G.. **Basic Partial Differential Equations.** Cambrige, Massachusetts: International Press, 1996.

[2] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

[3] FIGUEIREDO, D. G. de. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.** 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[4] GONDAR, J. L.; CIPOLATTI, R.. **Iniciação à modelagem matemática.** Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2005.

[5] IÓRIO, V.. **EDP, um curso de graduação.** Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1991.