UM PASSEIO PELO MUNDO DOS IRRACIONAIS E TRANSCENDENTES

Nathália Eliza Alves de Andrade (PIC\UEM), Patrícia Hernandes Baptistelli (Orientadora), e-mail: phbaptistelli@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas / Departamento de Matemática / Maringá, PR.

Ciências Exatas e da Terra - Matemática - Teoria dos Números

Palavras-chave: Transcendência, Números Algébricos, Números de Liouville.

Resumo

Os números reais podem ser classificados em racionais ou irracionais e algébricos ou transcendentes. Os números irracionais e transcendentes são bastante intrigantes, pois apesar de suas definições serem de fácil entendimento, nosso conhecimento de quem são eles ainda é muito limitado. Por isso, temos a falsa impressão de que os conjuntos dos números algébricos e dos racionais são muito maiores do que os conjuntos dos números irracionais e dos transcendentes.

Este projeto de pesquisa teve o intuito de ampliar o conhecimento matemático de uma discente do Programa de Educação Tutorial (PET-Matemática/UEM) por meio do estudo dos números irracionais e transcendentes, usando ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral.

Introdução

As definições de número algébrico e número transcendente são feitas através de conceitos algébricos, mas suas aplicações aparecem na geometria, na análise, na matemática financeira, entre outras áreas. Um número real ou complexo é algébrico se for solução de uma equação algébrica com coeficientes inteiros e um número real ou complexo é transcendente se for não algébrico.

A constante de Liouville, definida pela série numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!},$$

é historicamente o primeiro número transcendente reconhecido como tal e foi descoberto pelo matemático francês Joseph Liouville, em 1844. Sabe-se que todo número de Liouville é um número transcendente, porém nem todo número transcendente é um número de Liouville, como o número de Euler ***e*** e o π.

O objetivo principal desse projeto foi o estudo dos números irracionais e transcendentes. Começamos explorando os números algébricos e, num segundo momento, provamos a irracionalidade e a transcendência de alguns números mais conhecidos, como o π e o ***e***, e também de números menos conhecidos, como os números de Liouville. Uma propriedade interessante dos números de Liouville é que eles podem ser aproximados tanto quanto se queira por números racionais.

Materiais e métodos

O projeto foi desenvolvido por meio de estudo dirigido, primeiramente seguindo Milies e Coelho (2006) e depois seguindo Figueiredo (2011). Encontros semanais com a orientadora ocorreram a fim de discutir o que foi estudado e esclarecer possíveis dúvidas.

Resultados e Discussão

Demonstrar a transcendência de um número é, em geral, uma tarefa complicada. Grandes matemáticos deram suas contribuições nessa direção, como Cantor, Hilbert e Euler, mas o primeiro número a ter sua transcendência demonstrada foi a constante de Liouville. Com o objetivo de encontrar números transcendentes, Joseph Liouville estudou todas as propriedades dos números algébricos e construiu um conjunto que não satisfazia nenhuma dessas propriedades, os chamados números de Liouville.

Um número real α é um número de Liouville se existir uma sequência $\{p_j/q_j\}$ de racionais distintos, com $mdc\,(p_j, q_j) = 1$ e $q_j > 0$, tal que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^{j}},$$

onde $\{q_j\}$ não se mantém limitada. Um exemplo de um número de Liouville é a constante de Liouville citada na Introdução. Depois dela surgiram outros exemplos, como o número

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}}.$$

Dizemos que um número algébrico α é de grau n se ele for raiz de uma equação polinomial de grau n com coeficientes inteiros e se não existir uma equação desse tipo de menor grau tal que α seja solução. Sabendo disso temos o resultado a seguir:

Teorema: Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ um número algébrico real de grau n. Então existe uma constante $A > 0$ tal que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Aq^n}$$

para todo racional p/q. Se $n = 1$, o resultado vale para todo racional $p/q \neq \alpha$.

Como consequência imediata do teorema anterior temos um dos principais resultados do projeto:

Teorema: Todo número de Liouville é transcendente.

Conclusões

Apesar de serem pouco vistos na graduação, os números algébricos e os números transcendentes são interessantes e têm grande utilidade em diversas áreas.
Durante o desenvolvimento do projeto observamos que a irracionalidade de todos os números transcendentes reais segue diretamente do fato de que todo racional é um número algébrico. Além disso, foi possível perceber, na prática, a dificuldade em se provar a transcendência de alguns números, devido à sutileza e extensão dos resultados.
É válido destacar também a importância dos números de Liouville, que são números reais não racionais que podem ser “bem aproximados” por números racionais e, portanto, são não algébricos. Mais ainda, todo número real pode ser escrito como uma soma de dois números de Liouville. Podemos pensar então que, mesmo tendo medida nula em R, os números de Liouville estão estrategicamente posicionados na reta real.

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora pelos ensinamentos, à Universidade Estadual de Maringá e ao projeto PET Matemática-UEM pelo apoio estrutural e financeiro para o desenvolvimento deste projeto de iniciação científica.

Referências

Milies, C. P.; Coelho, S. P. **Números: Uma introdução à Matemática.** São Paulo, EDUSP, 2006.

Figueiredo, D. G. **Números irracionais e transcendentes**. Coleção Iniciação Científica - SBM, Rio de Janeiro, 2011.