

ESTUDANDO O CAOS EM BILHARES SOB A AÇÃO DE UM CAMPO GRAVITACIONAL

Leonardo Gabriel José Mendes Voltarelli (PIBIC/CNPq/FA/Uem), Breno Ferraz de Oliveira (Orientador), e-mail: leonardogabriel07@hotmail.com.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas /Maringá, PR.

Física/Física Geral

Palavras-chave: caos, sistemas dinâmicos, imprevisibilidade

Resumo: Partículas que possuem trajetórias descritas por equações determinísticas fazem parte de grupo chamado sistemas dinâmicos. Quando pequenas mudanças, nas condições iniciais dessas partículas, implicam em distintas trajetórias, tem-se um sistema dinâmico caótico. Bilhares são sistemas dinâmicos que podem apresentar comportamento caótico ou não. Neste projeto encontrou-se as condições para que um bilhar, circular, sob ação de um campo gravitacional constante, fosse caótico. Usando o expoente de Lyapunov foi possível obter os regimes de energias para qual o sistema é caótico.

Introdução

Sistema dinâmico é uma descrição determinística para evolução temporal de um sistema, em geral procura-se entender o comportamento do sistema em longos períodos de tempo. O Trabalho de Isaac Newton com o desenvolvimento do cálculo e equações diferenciais marca o início da teoria de sistemas dinâmicos, as equações diferenciais são uma importante ferramenta na caracterização de sistemas que evoluem de forma contínua no tempo, no entanto, foi Henri Poincaré que, pela primeira vez, considerou a possibilidade de caos em um sistema dinâmico determinístico, tal afirmação foi feita no âmbito do problema de três corpos celestes.

Os bilhares foram introduzidos na teoria dos sistemas dinâmicos por George David Birkhoff por volta de 1920. Bilhares é o sistema mais simples e mais utilizado para o estudo de caos dinâmico, [1], ele consiste de uma ou mais partículas se movendo livremente em uma região delimitada, as partículas colidem com a fronteira de tal região de forma que a componente tangencial da velocidade permanece constante e a componente normal muda de sinal. O formato da delimitação do bilhar pode determinar sua dinâmica, ela pode ser regular, mista ou caótica. Para uma região circular e velocidade constante, o bilhar é regular, no entanto, quando um campo gravitacional age sobre ele alterando sua velocidade, o sistema se torna caótico [2], [3].

Materiais e métodos

Para fazer o cálculo numérico do movimento das partícula foi usado o método Verlet, que consiste de aproximar trajetórias curvas usando pequenos segmentos de retas, com tal ferramenta é possível encontrar o espaço de fase para diferentes energias. A sensibilidade, de um sistema dinâmico, as condições iniciais pode ser mensurada usando o expoente Lyapunov. Segue do teorema que, para um sistema caótico, duas trajetórias inicialmente próximas tendem a se afastar exponencialmente no tempo, sendo assim, usando um programa em linguagem “c”, foi obtido o expoente para diferentes regimes de energia.

Resultados e Discussão

A circunferência foi dividida em dez partes sendo que cada uma corresponde a uma posição inicial. O ângulo que a velocidade faz com a tangente também foi dividido em dez partes, sendo assim, para cada regime de energia, foi realizado cem condições iniciais diferentes, os casos em que a energia potencial da bolinha era maior de que energia cinética dela foram desconsiderados [4]. Para energias baixas o comportamento do bilhar é regular, observasse que ele fica limitada a parte de baixo da barreira pois não tem energia cinético o suficiente para chegar ao topo do bilhar, sua trajetória é composta de pequenas parábolas. Aumentando ligeiramente a energia perceber um comportamento mais irregular, o espaço de fase fica um pouco mais cheio, isso representa um baixo comportamento caótico. Quando a energia foi aumentada, novamente, o espaço de fases mudou drasticamente, nestas condições a bolinha tem velocidade o suficiente para passar acima da metade do bilhar, gráfico azul, em tais condições o bilhar é altamente caótico [5]. Quando usado energias elevadas, padrões começaram a aparecer e de certa maneira se acentuam para energias ainda mais altas, isto está relacionado a uma quase periodicidade do sistema, para este caso, lugares em branco nos gráficos representam pontos do espaço de fase que o bilhar não ocupa mesmo que ele tenha energia para alcançar tais regiões ele não passa lá. Para energias extremamente altas, o bilhar começa a se comportar como se não tivesse uma força gravitacional agindo sobre ele, sua velocidade é tão alta e os intervalos entre suas colisões são tão baixos que sua trajetória de assemelha a uma reta.

O expoente de Lyapunov, em algum sentido, representa a expansão ou contração de certas direções do espaço de fases. Em um sistema caótico duas trajetórias, inicialmente separadas por uma pequena distância, tendem a se separar exponencialmente.

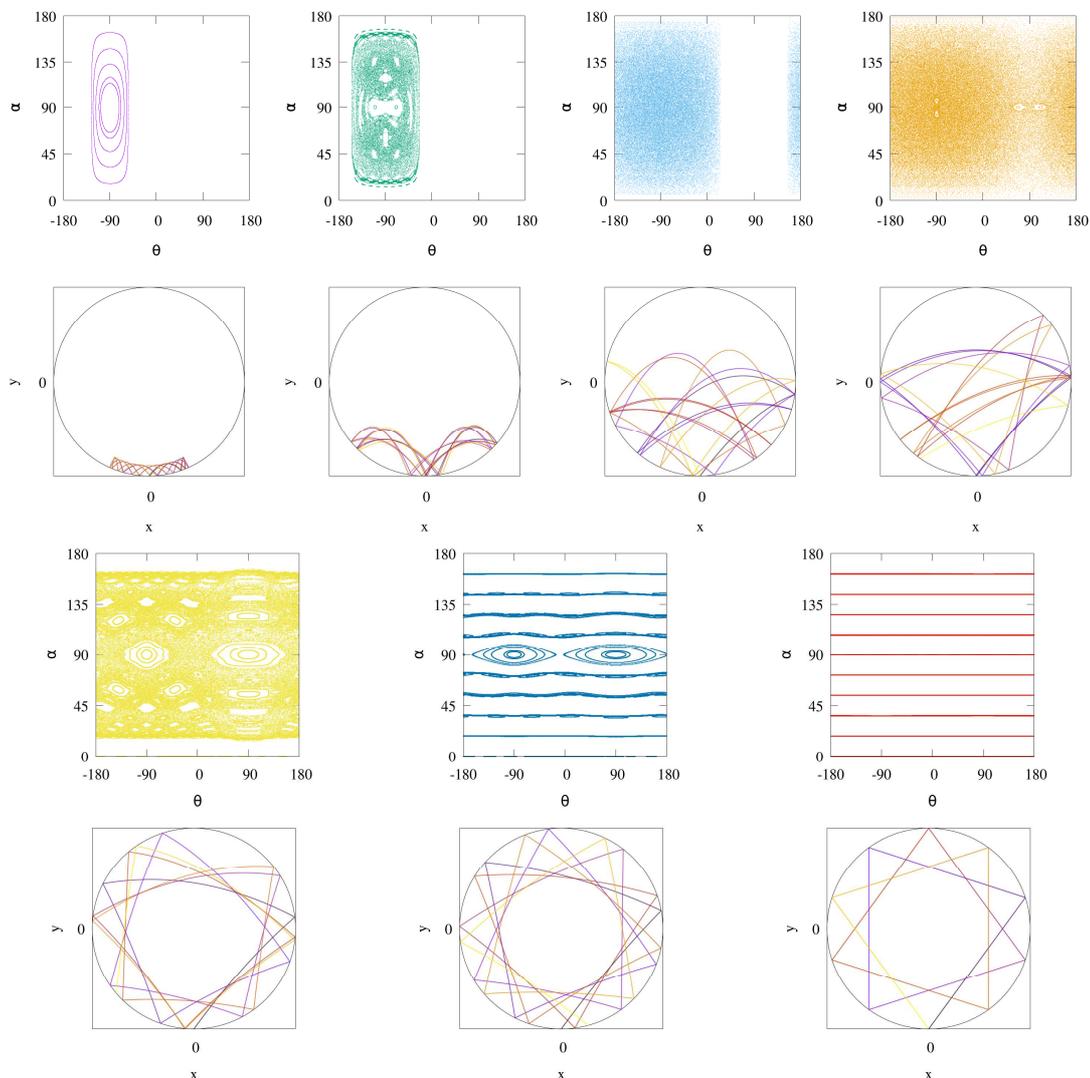


Figura 1 –A série de gráficos mostra o espaço de fase para valores de energia, logo abaixo uma das trajetórias. As cores, nos gráficos de baixo, correspondem a evolução temporal da posição da partícula, sendo que, preto representa tempo inicial e amarelo o tempo final.

Conclusões

O sistemas dinâmicos de bilhares, quando em movimento uniforme, tem dependência caótica de acordo com a delimitação de sua barreira. Quando aplicado um campo gravitacional para alterar sua velocidade durante o percurso foi possível observar o comportamento caótico mesmo na barreira circular que, quando possui velocidade constante, não apresenta tal comportamento. Para energias baixas o bilhar tem comportamento regular,

no entanto, para energias de 0,3 a 2,0 foi observado grande sensibilidade as condições iniciais, isto é, caos. Quando usado energias muito altas, como 500,0, o bilhar começa a se comportar como se não existisse um campo gravitacional agindo sobre ele, o sistema se torna periódico, as linhas retas no espaço de fases são associados a capacidade limitada do modelo computacional usado para fazer a simulação do percurso da partícula. Por final, calculou-se o expoente de Lyapunov, outro parâmetro para determinação de caos no sistema.

Agradecimentos

Queria agradecer a CNPQ pela bolsa de estudo e ao meu orientador Breno Ferraz de Oliveira pela oportunidade de participar do projeto.

Referências

- [1] D. V. T. Valerii Viktorovich Kozlov, **Billiards: a genetic introduction to the dynamics of systems with impacts**. American Mathematical Society, 1991.
- [2] R. s. S. T. Alberto Saa “**Bilhares: Aspectos físicos e matemáticos**.” 2013.
- [3] R. L. Devaney, **A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment**. Perseus Book Publishing, L.L.C., 1992.
- [4] E. D. L. Diogo Ricardo da Costa, Carl P. Dettmann, “**Circular, elliptic and oval billiards in a gravitational field**,” Commun Nonlinear Sci Number Simulat, 2013
- [5] Y. G. Sinai, **Introduction to ergodic theory**. Princeton University Press, 1976.