INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS GENERALIZADAS

Geliane Beatriz Pipino Tavares (PIBIC/FA), Profº Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo (Orientador), e-mail: mrtprimo@uem.br, Profª Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes (Co-orientadora), e-mail:lpgarantes@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas e da Terra / Maringá, PR.

Área e subárea: Matemática / Análise

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas, Integral de Kurzweil.

Resumo

Neste trabalho, introduzimos a teoria fundamental de integração de Kurzweil levando em consideração as vantagens de utilizar esta integral em relação às demais. Em seguida, estudamos a teoria básica das Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas (EDOG's), destacando as condições necessárias para a existência e unicidade de soluções.

Introdução

No ano de 1854, o matemático *Bernhard Riemann* (1826-1866) iniciou um estudo aprofundado sobre integral e formulou a definição que conhecemos hoje de integral de Riemann. A noção de Riemann foi finalizada por Gaston Darboux (1842-1917), onde ele demonstrou que uma função é integrável em [a,b] e possui área mensurável quando as somas inferiores e superiores de Riemann convergem para o mesmo valor à medida que o comprimento de qualquer partição do intervalo [a,b] tende a zero, no entanto, a teoria de integral de Riemann possui uma falha, existem funções que não podem ser integradas no sentido de Riemann, por exemplo, uma função não limitada em [a,b] não é integrável. Com o passar dos anos outros matemáticos tentaram sanar tais problemas, entre eles, *Henri Léon Lebesgue* (1875-1941).

No ano de 1957, *Jaroslav Kurzweil* baseando-se nas ideias de Riemann estudou um processo de integração, para funções de duas variáveis reais, tal integral foi denominada de integral de Kurzweil. Anos mais tarde, em 1961, Ralph Henstock trabalhou a definição de Integral de Kurzweil apenas para funções de uma variável real. Desta forma, a integral de Kurzweil engloba este conceito e que ficou conhecido como integral de Henstock-Kurzweil ou HK-Integral. E tal tipo de integral é a principal ferramenta no estudo de EDOG's.

Materiais e métodos

Foram realizadas pesquisas bibliográficas, estudos e discussões teóricas sobre o tema abordado.

Resultados e Discussão

A seguir, definimos as principais definições para o melhor entendimento de EDOG's. Estes conceitos podem ser encontrados em [1] e [2].

Definição 01 – Seja [a,b] um intervalo da reta R.

1. Uma divisão D = $\{J_1, J_2, \ldots, J_k\}$ de [a,b] é uma coleção finita de subintervalos J_i de [a,b], i=1,2,…,k, k ϵ N, tais que o intervalo [a,b] é igual a união de todos os J_i e ainda a interseção do interior de quaisquer dois intervalos diferentes é disjunta;
2. Um intervalo marcado é o par (τ, J) que consiste em um ponto τ ϵ R e um intervalo J em R. Dizemos que τ é a marca de J;
3. Uma divisão marcada ou partição de [a,b] é uma coleção finita D = $\{(\tau_i , J_i)$, i=1,2,…,k $\}$, onde D' = $\{J_1, J_2, \ldots, J_k\}$ é uma divisão de [a,b] e $\tau_i \in J_i$, para cada i=1, 2, …, k;
4. Um calibre em [a,b] é qualquer função δ: $[a,b]\to(0, +\infty)$;
5. Seja δ uma calibre em [a,b]. Uma divisão marcada ou partição D é dita δ-fina, se, para todo i=1, 2, …, k, tem-se J_i contido em $[\tau_i - \delta(\tau_i), \tau_i+ \delta(\tau_i)]$.

O Lema de Cousin afirma que se δ é uma função calibre em [a,b], então existe uma divisão marcada δ-fina em [a,b].

Definição 02 – Uma função U: $[a,b] \times [a,b]\to R^n$ é Kurzweil integrável se, existe um elemento I tal que, para todo ε > 0, existe um calibre δ em [a,b] satisfazendo $\| S(U, D) – I \| = \| \Sigma [U(\tau_j, \alpha_j) – U(\tau_j, \alpha_{j-1})] – I \| < \varepsilon$, para toda divisão marcada δ-fina D = $\{ (\tau_i , J_i)$, i=1,2,…,k $\}$ de [a,b], em que S(U,D) é a soma superior de Riemann nesta partição.

Notação 01 – O conjunto de todas as funções U: $[a,b] \times [a,b]\to R^n$ que são integráveis a Kurzweil é denotado por K([a,b]).

Teorema 01 – Se U ϵ K([a,b]) então $\int_a^b DU(\tau, t)$ é única.

Definição 03 – Consideremos a Equação Diferencial Ordinária Generalizada $dx/d\tau = DF(x,t)$, a função x: $[\alpha, \beta]\to R^n$ é dita solução de EDOG's no intervalo $[\alpha, \beta]$ contido em R, se (x(t),t) ϵ G, para todo t ϵ $[\alpha, \beta]$, e se $x(s)-x(v)=\int_s^v DF(x(\tau),t)$ quase sempre que s,v ϵ $[\alpha, \beta]$.

Definição 04 – Dizemos que função F: G $\rightarrow R^n$ pertence a classe $\mathcal{F}(G, h, \omega)$ se $\|F(x,t_2)-F(x,t_1)\| \leq |h(t_2)- h(t_1)|$, para todo $(x,t_1), (x,t_2) \in G$ e $\|F(x,t_2)-F(x,t_1)-F(y,t_2)+F(y,t_1)\| \leq \omega(\|x-y\|) |h(t_2)- h(t_1)|$, para todo $(x,t_1), (x,t_2), (y,t_1), (y,t_2) \in G$, onde $G=B_c \times (a,b)$; $B_c = \{ x \in R; \|x\| < c\}$, onde h satisfaz as condições de Caratheodory (Veja [01]), e ω satisfaz as condições de Henstock (Veja [01]).

Teorema 01 – (Teorema da existência e unicidade) Seja $F \in \mathcal{F}(G, h, \omega)$. Então, para todo $(x',t_0) \in G$, com $x'^{+} \in B_c$, existe $\Delta > 0$ tal que, $x:[t_0,t_{0+}\Delta]\rightarrow R^n$ é a única solução da EDOG's que satisfaz $x(t_0)=x'$.

Mais resultados e exemplos sobre EDOG's foram estudados no decorrer do projeto e finalizaremos a nossa apresentação exibindo uma aplicação do Teorema 01.

Conclusões

Após os estudos realizados ao longo deste projeto, compreendemos o sentido das Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas, bem como o método para encontrarmos uma solução por meio da integral de Kurzweil e suas propriedades.

Agradecimentos

Agradeço a Fundação Araucária pelo incentivo financeiro e aos professores envolvidos no projeto.

Referências

[1] Schwabik, S. Generalized Ordinary Dirêntial Equations, World Scientifc, Series in Real Analysis, vol. 5, 1992.
[2] SOUTO, G. M. Equações diferenciais funcionais com retardamento e impulsos via equações diferenciais ordinárias. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá - Maringá, 2013.