INTRODUÇÃO AOS ESPAÇOS MÉTRICOS INTRÍNSECOS

Christian José Santos Gonçalves (PIC/Uem), Ryuichi Fukuoka (Orientador), e-mail: ra95057@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Matemática/ Geometria e Topologia

Palavras-chave: espaço de comprimento, métrica intrínseca, estrutura de comprimento.

Resumo:

Os espaços métricos intrínsecos ocupam uma posição central na área de Geometria e Topologia. Eles são caracterizados pelo fato da distância entre dois pontos ser o ínfimo do comprimento de curvas que os ligam.
O objetivo deste trabalho é introduzir os espaços métricos intrínsecos. Estudamos algumas de suas propriedades, bem como invariantes que nos possibilite diferencia-los de espaços métricos gerais.

Introdução

Espaços métricos intrínsecos são espaços cuja métrica é intrínseca, ou seja uma métrica associada a uma estrutura de comprimento. Uma estrutura de comprimento em um espaço topológico X é um par (A,L) onde A é uma classe de caminhos admissíveis em X e L é uma função chamada de comprimento, que faz corresponder a cada elemento na classe um número não negativo. Definimos uma métrica em um espaço Hausdorff X associada ao par (A,L), tal que para todo x, y em X, a distância entre eles é o ínfimo dos comprimentos das curvas que os ligam. Esta métrica é chamada métrica intrínseca, e o espaço Hausdorff associado a uma métrica intrínseca é chamado espaço métrico intrínseco.
Dado um espaço métrico geral X, podemos usar sua métrica para induzir uma estrutura de comprimento em X, a estrutura de comprimento induzida. Não é difícil mostrar que a métrica geral é intrínseca se, e somente se, ela coincide com a métrica intrínseca induzida, isto nos permite caracterizar métricas intrínsecas.
No âmbito de espaços mais gerais, como variedades Riemannianas e/ou variedades de Finsler que são espaços que generalizam superfícies em R^3, tais conceitos são essenciais e aparecem implicitamente, se considerarmos somente suas estruturas métricas.

Materiais e métodos

O projeto foi desenvolvido através de exposição no quadro de seminários semanais para o orientador seguindo a bibliografia principal como referência. Cada exposição durava aproximadamente uma hora e quarenta minutos. As dúvidas que porventura surgiram foram esclarecidas durante a exposição ou então durante a semana em horário pré-definido.

Resultados e Discussão

Considere X um espaço topológico Hausdorff, e (A, L) uma estrutura de comprimento em X. Para todo x, $y \in X$ a distância d_L entre x e y é definida pelo ínfimo do conjunto $\{L(\gamma);\ \gamma$ liga x e y$\}$. Usando as propriedades da estrutura de comprimento, verifica-se que d_L é de fato uma métrica em X. Esta métrica é chamada métrica intrínseca e o par (X, d_L) é chamado espaço de comprimento, ou simplesmente espaço métrico intrínseco.
Note que d_L não é necessariamente uma métrica finita. Assim poderemos subdividir canonicamente o espaço X em dois subespaços, um que para quaisquer dois pontos pode-se obter um caminho de comprimento finito os ligando, e outro subespaço que não tem essa propriedade. Mais precisamente a relação “pertencer a mesma componente de acessibilidade” em X é uma relação de equivalência. É fácil provar que caminhos em X de comprimento finito, são contínuos com relação a métrica intrínseca.

Proposição 1: A topologia determinada por d_L é mais fina do que a topologia de X.
Vale fazer aqui um comentário, se X é munido com a topologia discreta, a topologia determinada por d_L é a topologia discreta.

Considerando (X,d) um espaço métrico, podemos induzir uma estrutura de comprimento em X utilizando a métrica d, que por sua vez induz uma métrica intrínseca $\hat{d}$. Uma curva é dita retificável se seu comprimento é finito. Nós diremos que d é uma métrica intrínseca se $d=\hat{d}$.

Proposição 2: A função comprimento induzida pela métrica d satisfaz as seguintes propriedades para todo $\gamma: [a,b] \to X$:

1. Desigualdade triangular generalizada: $L(\gamma) \geq d(\gamma(a),\gamma(b))$;
2. Aditividade: Se $a < c < b$, então $L(\gamma,a,c) + L(\gamma,c,b)$. Em particular, $L(\gamma,a,t)$ é uma função não decrescente;
3. Se γ é retificável, a função $L(\gamma,c,d)$ é continua em c e em d;
4. L é um funcional semi-contínuo inferiormente no espaço das aplicações contínuas de [a,b] em X com respeito a convergência pontual. Isto é, se uma sequência (γ_i) de caminhos retificáveis (de [a,b] em X) é tal que $\gamma_i(t) \to \gamma(t)$ quando $i \to \infty$ para todo $t \in [a,b]$, então $\liminf L(\gamma_i) \geq L(\gamma)$.

Proposição 3: Seja (X,d) um espaço métrico e $\hat{d}$ a métrica intrínseca induzida por d. Então valem as seguintes sentenças:

1. Se γ é uma curva retificável em (X,d), então $L_{\hat{d}}(\gamma) = L_d(\gamma)$;
2. A métrica intrínseca induzida por $\hat{d}$ coincide com $\hat{d}$.

A proposição 3 nos dá um critério construtivo para descobrir se uma métrica d é intrínseca ou não. Ou seja, uma métrica é intrínseca se, e somente se, ela se induzir. A seguinte proposição generaliza isto para métricas intrínsecas arbitrárias.

Proposição 4: Um espaço métrico (X,d) é um espaço de comprimento se, e somente se, a métrica intrínseca induzida por d coincide com d.

Assim conseguimos caracterizar métricas intrínsecas olhando apenas para a função comprimento induzida. A partir daí, como podemos obter a função comprimento que dá origem a métrica intrínseca? Note que a proposição anterior apenas nos diz se uma métrica é, ou não, intrínseca.
Em geral, para encontrar tal estrutura precisamos de algumas suposições iniciais, pois podem haver várias outras funções comprimento que dá origem a mesma métrica. A proposição anterior nos dá um candidato natural a estrutura de comprimento que dá origem a métrica intrínseca.

Teorema 5: Seja (X,d) um espaço de comprimento. Se L é uma função comprimento semi-contínua inferiormente que dá origem a d, então L coincide com a estrutura de comprimento induzida por d em toda curva admissível para L, isto é, $L(\gamma) = L_d(\gamma)$.

Nós dizemos que uma métrica d em X é estritamente intrínseca se para quaisquer dois pontos $x, y \in X$ existe um caminho de comprimento mínimo os ligando. Em espaços estritamente intrínsecos, sempre existe um ponto médio, isto é, para quaisquer dois pontos $x, y \in X$ existe $c \in X$ tal que $d(x,c) = d(c,y) = \frac{1}{2}\, d(x,y)$.

Teorema 6: Seja (X,d) um espaço métrico completo. Se para quaisquer dois pontos $x, y \in X$ existe um ponto médio, então d é estritamente intrínseco.

Conclusões

Neste trabalho conseguimos obter uma caracterização de métricas intrínsecas, analisando algumas de suas propriedades, bem como invariantes que permitiram diferenciá-los de espaços métricos gerais.
Nosso trabalho reside na colaboração em complementar a teoria, cujo desenvolvimento foi feito detalhadamente e assim facilitar o entendimento para estudos posteriores.

Agradecimentos

Agradeço aos Professores Ryuichi Fukuoka e Eduardo de Amorim Neves pela paciência, incentivo e colaboração na minha aprendizagem durante o projeto.

Referências

BURAGO, D. BURAGO, Y. IVANOV, S. **A course in metric geometry.** Graduate Studies in Mathematics. Vol 33. American Mathematical Society. 2001.

MUNKRES J. R.. **Topology.** 2 ed. Pearson, 2000.