ESTUDO DA TEORIA BÁSICA DE MÓDULOS

Felipe Gabriel Bogo (PIBIC/FA/UEM), Juliana Camile do Nascimento (PIBIC/FA/UEM, Laerte Bemm (Orientador), e-mail: laertebemm1983@yahoo.com.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Área: Matemática

Subárea: Álgebra

Palavras-chave: domínios de ideais principais, módulos finitamente gerados, grupos abelianos finitamente gerados, Teorema dos Divisores Elementares.

Resumo:

Neste trabalho estudamos parte da teoria básica de módulos. Damos enfase a módulos sobre domínios de ideais principais, e mostramos que módulos finitamente gerados sobre tais domínios podem ser descritos completamente. Como aplicação disso, classificamos os grupos abelianos finitamente gerados.

Introdução

A noção de módulo é uma generalização de espaço vetorial, em que um anel com unidade (ao invés de um corpo) age sobre elementos de um grupo abeliano aditivo. A teoria de módulos tem muitas aplicações em áreas variadas da matemática. Uma das aplicações tem destaque especial: a classificação dos grupos finitamente gerados.

Para o caso de módulos sobre domínios de ideais principais, nós podemos decompor esses módulos como soma de módulos indecomponíveis. Uma vez que grupos abelianos podem ser vistos como módulos sobre o anel dos números inteiros, uma classificação dos grupos abelianos finitamente gerados será obtida.

O objetivo principal deste trabalho é estudar tais classificações.

Materiais e métodos

O projeto foi desenvolvido por meio de pesquisas bibliográficas e apresentações de seminários semanais ao orientador a fim de expor os resultados estudados e de esclarecer possíveis dúvidas.

Resultados e Discussão

Apresentamos abaixo as principais definições e resultados sobre os quais falaremos na apresentação. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências listadas ao final deste resumo.

Lembramos que um anel R é um domínio de integridade se R é um anel comutativo com unidade, e vale:

dados $a, b \in R$, se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

Definição 01: Seja R um anel com unidade 1. Um conjunto não vazio M é dito um módulo à esquerda sobre R (ou um R-módulo à esquerda), se M é um grupo abeliano em relação a uma operação de adição, denotada por $+$, e está definida uma operação externa que a cada par $(r, m) \in R \times M$ associa um único elemento $rm \in M$ e satisfaz, para quaisquer $r, r' \in R$ e quaisquer $m, m' \in M$,

$(i)\ r(r'm) = (rr')m;$
$(ii)\ r(m + m') = rm + rm';$
$(iii)\ (r + r')m = rm + r'm;$
$(iv)\ 1m = m.$

Devido a unicidade do elemento simétrico do grupo aditivo $(M, +)$, temos que $(-1)m = -m$, para todo $m \in M$.

Exemplo 2: Todo espaço vetorial sobre um corpo K é um K-módulo.

Exemplo 3: Todo grupo abeliano G pode ser considerado como um módulo sobre o anel $\mathbb{Z}$, dos números inteiros, definindo o produto de um inteiro $n \in \mathbb{Z}$ por um elemento $g \in G$ como $ng \in G$.

Definição 4: Dado um R-módulo M, um subconjunto não vazio N de M é um submódulo se, e somente se, para quaisquer $n, n' \in N$ e $r \in R$,

$(i)\ n + n' \in N;$
$(ii)\ rn \in N.$

Dizemos que um submódulo é próprio se ele for não nulo e diferente do módulo todo.

Definição 5: Sejam M e N dois R-módulos. Uma função $f: M \to N$ é dita um $R-$ homomorfismo se, para quaisquer $m, m' \in M$ e $r \in R$, temos:

$(i)\ f(m+m')=f(m)+f(m');$
$(ii)\ f(rm)=rf(m);$

Dado um R –homomorfismo de módulos $f: M \to N$, o conjunto

$$Ker(f)=\{m \in M \mid f(m)=0\}$$

é denominado Kernel de f e é um submódulo de M. É fácil ver que f é injetora se e somente se $Ker(f)=\{0\}$.

Definição 6: Um módulo M é dito ser finitamente gerado, se existem finitos elementos $m_1,\dots,m_k \in M$ tais que para todo $m \in M$, existem $r_1,\dots,r_k \in R$ com

$$m=r_1m_1+\cdots r_km_k.$$

Definição 7: Se N e N' são submódulos de um R-módulo M, o conjunto

$$N+N'=\{n+n' \mid n \in N \ e \ n' \in N'\}$$

é um submódulo de M, denominado submódulo soma de N e N'.

Definição 8: Um R-módulo M é uma soma direta interna de uma família de submódulos $M_1,\dots,M_k$ de M, se todo elemento $m \in M$ pode ser escrito de manira única como $m=m_1+\cdots+m_k$, em que $m_i \in M_i$, para todo $i=1,\dots,k$. Neste caso, escrevemos $M=M_1\oplus\cdots\oplus M_k$.

Definição 9: Um R-módulo M é decomponível se existem são submódulos próprios N e N' de M tais que $M=N\oplus N'$. Em caso contrário, M é indecomponível.

Com todas estas definições, estamos aptos para enunciar o teorema principal desse estudo.

Teorema 10 (Teorema dos Fatores Elementares)*:* Seja R um domínio de ideais principais. Todo R-módulo finitamente gerado é soma direta de R-módulos indecomponíveis.

Corolário 11: Todo grupo abeliano finitamente gerado pode ser escrito como uma soma direta da forma $\mathbb{Z}^n\oplus\mathbb{Z}_{n_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{n_k}$.

Desta forma, obtemos a classificação de grupos abelianos finitamente gerados conforme proposto.

Conclusões

Apresentamos resultados que são generalizações de resultados vistas em cursos de álgebra linear e podemos perceber que certas propriedades de espaços vetoriais não são válidas para módulos. Concluímos que podemos classificar todo módulo finitamente gerado sobre domínio principal.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

MILIES, César Polcino. **Anéis e módulos**, IME-USP, 1972.

AZEVEDO, Alberto. **Módulos sobre domínios principais**, IMPA, 1971.