# ESPAÇOS DE BANACH E ESPAÇOS DE HILBERT

Layanne Raquel Pereira Lobato (PIBIC/CNPq/FA/Uem), Marcelo Moreira Cavalcanti (Orientador) e-mail: mmcavalcanti@uem.br

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

**Palavras-chave:** Espaços Normados, Espaços de Banach e Espaços de Hilbert.

**Resumo:**

Neste trabalho estamos interessados em estudar resultados envolvendo Espaços de Banach e Espaços de Hilbert.

## Introdução

Iniciaremos a apresentação mostrando algumas definições e resultados envolvendo norma e espaços normados que contribuirão para o melhor entendimento sobre os Espaços de Banach e os Espaços de Hilbert.
Em sequência demonstraremos a identidade do paralelogramo que nos auxilia na identificação desses espaços e finalizaremos apresentando um exemplo de um Espaço de Banach e um exemplo de um Espaço de Hilbert.

## Materiais e métodos

Foram realizadas pesquisas bibliográficas, estudo e discussão teórica do tema abordado.

## Resultados e Discussão

Apresentaremos abaixo as definições necessárias para compreender os Espaços de Banach e Espaços de Hilbert, estas e outras propriedades que podem ser encontradas em [1]-[5].

Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma função
$\| \cdot \| : E \to R$ que satisfaz as seguintes propriedades:
1) $\|x\| > 0$, para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) Para todo $\alpha \in R$ e para todo $x \in E$ vale
$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ ;
3) (Desigualdade triangular) Para todos $x, y \in E$ vale
$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Um espaço vetorial E munido da norma $\| \cdot \|$ é uma espaço vetorial normado. Denotamos $(E, \| \cdot \|)$.

Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo.

Seja X um espaço vetorial real. Um produto interno é uma aplicação
$<,>: X \times X \to R$, tal que, para quaisquer $x, y, z \in X$ e $\alpha \in R$:
(P1) $< x+y,z > = < x,z > + < y,z >$;
(P2) $< \beta x,y > = \beta < x,y >$;
(P3) $< x,y > = < y,x >$;
(P4) $< x,x > \geq 0$ e $<x,x > = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Como consequência desta definição temos que a função $||,|| : X \to R$ definida por $|| x ||^2 = < x,x >$ é uma norma.

Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H, munido de um produto interno e completo em relação à norma definida por esse produto interno.

(Identidade do Paralelogramo) Se H é um espaço de Hilbert, então vale a seguinte igualdade:

$||x + y ||^2 + || x - y ||^2 = 2(|| x ||^2 + || y ||^2)$.

Para finalizar, exemplificaremos que o espaço das sequências de quadrado somável, denotado por $l^2$, é um Espaço de Hilbert e o espaço de todas funções contínuas em [a,b] é um espaço de Banach mas não é um Espaço de Hilbert.

## Conclusões

O projeto de Iniciação cientifica permitiu estudarmos a fundo os Espaços de Banach e os Espaços de Hilbert e suas propriedades e possibilitou reescrever detalhadamente vários resultados envolvendo esses espaços.

## Agradecimentos

Agradeço ao CNPq, pelo apoio financeiro.

## Referências

[1] CAVALCANTI, V. N., KOMORNIK, V. Introdução á Análise Funcional, Maringá: Eduem,2011.

[2] DE OLIVEIRA, C. R. Introdução á Análise Funcional. 2.ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2005. v.1.

[3] KREYSZIG, E. Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley, New York, 1989.

[4] LIMA, E. L. Curso de análise; v.1. 12.ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2010.

[5] LIMA, E. L. Espaços Métricos. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada,1977.