MÓDULOS SOBRE ANÉIS COM UNIDADE

Lucas da Penha Soares (PIC/Uem), Érica Zancanella Fornaroli (Orientadora), e-mail: ra94507@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá / Centro de Ciências Exatas/Maringá, PR.

Matemática / Álgebra

Palavras-chave: módulo, módulo livre, módulo artiniano e noetheriano

Resumo:

Neste trabalho realizamos um estudo sobre módulos sobre anéis com unidade, suas propriedades básicas e exemplos. Também estudamos alguns tipos especiais de módulos como módulos livres, artinianos e noetherianos.

Introdução

O conceito de módulo nada mais é que uma generalização da noção de espaço vetorial, onde os escalares são elementos de um anel com unidade (não necessariamente comutativo) ao invés de um corpo. A teoria de módulos se aplica a vários ramos da Álgebra como a teoria de anéis e a álgebra homológica. Ela se tornou uma ferramenta bastante importante a partir da década de 1920 com o trabalho da matemática alemã Emmy Noether (1882-1935). Além de provar vários resultados sobre módulos, foi ela quem observou que o conceito de módulo poderia ser usado para preencher a lacuna entre duas linhas importantes na álgebra: a teoria de representações de grupos finitos por matrizes e a teoria de estrutura de álgebras. Neste trabalho, realizamos um estudo introdutório sobre módulos. Foram estudados submódulos, módulos quociente, homomorfismos, sequências exatas, somas e produtos diretos. Também estudamos módulos livres, módulos artinianos e módulos noetherianos.

Materiais e métodos

Durante o desenvolvimento do projeto foram realizadas apresentações de seminários semanais com o objetivo de suprir possíveis dúvidas e apresentar os resultados obtidos durante o estudo semanal. Os estudos foram baseados nas referências [1], [2] e [3].

Resultados e Discussão

Na primeira parte do projeto, estudamos a definição de módulo sobre um anel com unidade e vimos vários exemplos. Um módulo à esquerda sobre um anel A (ou um A-módulo à esquerda) é um grupo abeliano aditivo M munido de uma multiplicação à

esquerda por elementos de *A* (chamada multiplicação por escalar) satisfazendo as seguintes propriedades:
M1) $a(bm)=(ab)m$, para todos $a,b \in A$ e $m \in M$;
M2) $a(m+n)=am+an$, para todos $a \in A$ $m,n \in M$;
M3) $(a+b)m=am+bm$, para todos $a,b \in A$ e $m \in M$;
M4) $1m=m$, para todo $m \in M$, onde 1 é a unidade de *A*.
Módulos à direita são definidos de maneira simétrica. Se o anel *A* é comutativo, todo módulo à direita é um módulo à esquerda e vice-versa. Por exemplo, todo espaço vetorial sobre um corpo *K* é um *K*-módulo; todo anel é um módulo sobre ele mesmo, tanto à direita quanto à esquerda, com a multiplicação por escalar definida pela multiplicação do anel; o conjunto das funções de um conjunto *X* em um anel *A* munido da soma usual de funções e da multiplicação usual de um escalar por uma função é um *A*-módulo à esquerda. Também foram estudadas propriedades básicas de módulos, submódulos, módulos quociente, homomorfismos, sequências exatas, bem como somas e produtos diretos de módulos.
Posteriormente, estudamos um tipo particular módulo, chamado módulo livre. Um módulo livre é um módulo que possui uma base, ou seja, um conjunto gerador linearmente independente. Por exemplo, todo espaço vetorial sobre um corpo é um módulo livre e todo anel como um módulo sobre ele mesmo também é livre. Destacamos que todo módulo é isomorfo a um quociente de um módulo livre. Daí a importância de se estudar esse tipo de módulo.
Finalizamos nosso trabalho estudando módulos noetherianos e artinianos. Um módulo *M* é noetheriano (respectivamente artiniano) se toda cadeia ascendente (respectivamente descendente) de submódulos de *M* estaciona. Por exemplo, todo espaço vetorial de dimensão finita é artiniano e noetheriano. Se um anel *A*, como módulo sobre ele mesmo à esquerda, é noetheriano (respectivamente artiniano), dizemos que *A* é um anel noetheriano à esquerda (respectivamente artiniano à esquerda). Por exemplo, o anel *Z* dos números inteiros é noetheriano, mas não é artiniano. No entanto, vimos que se um anel *A* é artiniano à esquerda, então ele é noetheriano à esquerda.

Conclusões

Neste trabalho estudamos o conceito de módulo, que é uma generalização da noção de espaço vetorial, uma vez que os escalares que multiplicam os elementos do módulo são elementos de um anel com unidade, ao invés de um corpo. Vimos que nem todas as propriedades de um espaço vetorial valem para módulos. Por exemplo, nem todo módulo possui uma base. Aqueles que possuem, são chamados de módulos livres. Os resultados sobre módulos podem ser aplicados no estudo de anéis. Por exemplo, afirmar se um anel *A* é noetheriano ou artiniano à esquerda nos permite conhecer algumas propriedades de seus ideais à esquerda, uma vez os ideais à esquerda de *A* são exatamente os submódulos de *A* como módulo à esquerda sobre ele mesmo.

Agradecimentos

Agradeço a Universidade Estadual de Maringá, ao projeto PET Matemática-UEM pelo apoio estrutural para o desenvolvimento deste projeto de iniciação científica e a minha orientadora Érica Zancanella Fornaroli.

Referências

[01] POLCINO MILIES, F. C. **Anéis e Módulos**. São Paulo: IME-USP, 1972.
[02] JACOBSON, N. **Basic Algebra I**. 2. ed. Mineola: Dover Publications, INC, 2009.
[03] JACOBSON, N. **Basic Algebra II**. 2. ed. Mineola: Dover Publications, INC, 2009.